

VŠB – technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

Algoritmy pro stanovení elasto-plastické odezvy konstrukce  
z elastického MKP řešení

Estimation Algorithms of Elasto-Plastic Structure  
Response from Elastic FEM Solution

Student:

Bc. Dagmar Ličková

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.

Ostrava 2013

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Dagmar Ličková**  
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Algoritmy pro stanovení elasto-plastické odezvy konstrukce z  
elastického MKP řešení**  
**Estimation Algorithms of Elasto-Plastic Structure Response from Elastic  
FEM Solution**

Zásady pro vypracování:

- 1) Analýza existující rešerše možných řešení.
- 2) Analýza dostupných experimentálních dat vhodných pro testování
- 3) Příprava elastických MKP modelů.
- 4) Tvorba skriptů umožňujících automatizované zpracování MKP výsledků danými metodami.
- 5) Vyhodnocení úspěšnosti jednotlivých metod vůči experimentálním datům, srovnání rozdílů mezi nimi.
- 6) Závěry

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Halama, R.; Parma, S.: Cyklická plasticita. [Zpráva FAD/11/003]. VŠB-TUO a ČVUT v Praze, Ostrava 2011.
- [2] M.N.K.Singh, G.Glinka, R.N.Dubney. Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading, International Journal of Fracture 76: 39–60, 1996.
- [3] Raju Sethuraman, S. Viswanadha Gupta. Evaluation of notch root elasto-plastic stress-strain state for general loadings using an elastic solution. International Journal of Pressure Vessels and Piping 81: 313–325, 2004.
- [4] Duiyi Ye, Olaf Hertel, Michael Vormwald. A unified expression of elastic-plastic notch stress-strain calculation in bodies subjected to multiaxial cyclic loading, International Journal of Solids and Structures 45: 6177–6189, 2008.
- [5] Mehmet Firat. A notch strain calculation of a notched specimen under axial-torsion loadings, Materials&Design 32: 3876–3882, 2011.
- [6] Duiyi Ye, Olaf Hertel, Michael Vormwald. A unified expression of elastic-plastic notch stress-strain calculation in bodies subjected to multiaxial cyclic loading, International Journal of Solids and Structures 45: 6177–6189, 2008.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.**

Datum zadání: 14.12.2012

Datum odevzdání: 20.05.2013



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
děkan fakulty

### **Místopřísežné prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracovala samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedla jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 20.5. 2013



.....  
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 20. 5. 2013



.....  
podpis

Jméno a příjmení autora práce: Bc. Dagmar Ličková

Adresa trvalého pobytu autora práce: Polanecká 333, Ostrava – Svinov, 721 00

## **ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE**

LIČKOVÁ, D. Algoritmy pro stanovení elasto-plastické odezvy konstrukce z elastického MKP řešení: diplomová práce, Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2013, 83 s. Vedoucí práce: Halama, R.

Diplomová práce se zabývá stanovením elasto-plastické odezvy konstrukce z elastického MKP řešení. Podrobně je analyzován vybraný algoritmus bilineární materiál a nelineární Armstrong-Frederickův model. Pozornost je také věnována analýze dostupných experimentálních dat a literatury. V programovacím jazyce Matlab je naprogramován m-file, který stanoví horní a dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu Neuberovou a Glinkovou metodou, jak pro bilineární materiál, tak i pro nelineární Armstrong-Frederickův model. Hlavním cílem je ovšem vytvoření maker v programu ANSYS APDL, které automaticky zpracují MKP modely (válcové vzorky s vruby - duté i plné) a samy stanoví horní a dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu Neuberovou a Glinkovou metodou pro oba zmíněné materiálové modely.

## **ANNOTATION OF DIPLOMA THESIS**

LIČKOVÁ, D. Estimation Algorithms of Elasto-Plastic Structure Response from Elastic FEM Solution: Diploma Theses. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 2013, 83 p. Thesis head: Halama, R.

Diploma Thesis deals with Algorithms of Elasto-Plastic Structure Response from Elastic FEM Solution. In details is analyzed bilinear material and non-linear Armstrong-Frederick's model. Attention is also paid to the analysis of available experimental data and literature. In the programming language Matlab is programmed m-file, which sets the upper and lower bound of stress and strain in the notch root Neuber's and Glinka's method for both of materials model. The main aim is made macro in program ANSYS APDL, which automatically process the FEM models (the hollow tube specimen and cylindrical specimen) and they determine the upper and lower bound of stress and strain in the notch root by Neuber's and Glinka's method, to combine both material's models.

## OBSAH:

<b>Seznam použitých symbolů.....</b>	<b>9</b>
<b>1. Úvod .....</b>	<b>11</b>
<b>2. Analýza existující rešerše možných řešení .....</b>	<b>13</b>
2.1 Neuberova metoda.....	13
2.2 Glinkova metoda .....	16
2.3 Srovnání Neuberovy a Glinkovy metody .....	18
2.4 Přístupy ekvivalentních energií pro neproporcionální zatěžování .....	22
2.5 Ostatní aproximační metody pro stanovení napjatosti a deformace ve vrubech .....	24
<b>3. Analýza dostupných experimentálních dat vhodných pro testování .....</b>	<b>25</b>
3.1 Geometrie zkušebních vzorků .....	25
3.2 Typ zatížení vzorků .....	29
3.3 Experimentální zařízení a provedení pokusu.....	30
3.4 Materiál zkušebních vzorků .....	32
<b>4. Tvorba MKP modelů.....</b>	<b>35</b>
4.1 Tvorba geometrie, volba materiálu a zatížení .....	36
4.2 Typ prvku, síť a uložení modelu .....	38
<b>5. Tvorba skriptů umožňujících automatizované zpracování MKP výsledků... 40</b>	<b>40</b>
5.1 Sestavení soustav rovnic pro bilineární materiál .....	40
5.2 Sestavení soustav rovnic pro nelineární materiál – Armstrong-Frederickův model.....	44
5.3 Popis metody řešení soustav rovnic pro odhady napětí a deformace v kořeni vrubu.....	48
5.4 Popis skriptu umožňujícího automatizované zpracování MKP výsledku danými metodami .....	50
<b>6. Příklady stanovení elasto-plastického řešení z elastického MKP výpočtu .....</b>	<b>52</b>
6.1 Verifikace modelů s bilineárním materiálem .....	55
6.1.1 Kombinace tahu a krutu pro bilineární materiál .....	55
6.1.2 Kombinace tahu a vnitřního přetlaku pro bilineární materiál.....	59
6.2 Verifikace Armstrong-Frederickova modelu .....	63
6.2.1 Kombinace tahu a krutu pro Armstrong-Frederickův model .....	63
6.2.2 Kombinace tahu a vnitřního přetlaku pro Armstrong-Frederickův model.....	66

6.3	Výpočet za použití obou materiálových modelů současně.....	68
6.3.1	Zatížení krutem.....	68
6.3.2	Kombinace krutu a vnitřního přetlaku.....	71
6.4	Vyhodnocení výsledků.....	74
<b>7.</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>76</b>
<b>8.</b>	<b>Poděkování .....</b>	<b>78</b>
<b>9.</b>	<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>79</b>
<b>10.</b>	<b>Seznam příloh .....</b>	<b>80</b>
10.1	Tištěná příloha.....	80
10.2	Příloha na CD-ROM.....	83



## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

	Písmena latinské abecedy	
C	Materiálová konstanta	[MPa]
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
$E_T$	Tečný modul pružnosti	[MPa]
F	Tahová síla	[N]
$K'$	Materiálová konstanta	[MPa]
$K_t$	Teoretický součinitel koncentrace napětí	[-]
$K_\varepsilon$	Součinitel koncentrace deformace	[-]
$K_\sigma$	Součinitel koncentrace napětí	[-]
$n'$	Materiálová konstanta	[-]
$n_1, n_2$	Materiálová konstanta	[-]
p	Tlak	[MPa]
R	Poloměr vrub	[mm]
t	Tloušťka vrubu	[mm]
T	Krouticí moment	[kNm]
W	Energie	[J]

	Písmena řecké abecedy	
$\gamma$	Materiálová konstanta	[-]
$\delta$	Kronekerovo delta	[-]
$\Delta\varepsilon^E$	Přírůstek dolního odhadu deformace v kořeni vrubu	[-]
$\Delta\varepsilon^N$	Přírůstek horního odhadu deformace v kořeni vrubu	[-]
$\Delta\varepsilon_{ij}$	Přírůstek deformace	[-]
$\Delta\sigma^E$	Přírůstek dolního odhadu napětí v kořeni vrubu	[MPa]
$\Delta\sigma^N$	Přírůstek horního odhadu napětí v kořeni vrubu	[MPa]
$\dot{\varepsilon}$	Rychlost deformace	[s <sup>-1</sup> ]
$\varepsilon^e$	Deformace pro elastický materiál v kořeni vrubu	[-]
$\varepsilon^E$	Dolní odhad deformace v kořeni vrubu	[-]
$\varepsilon^{MKP}$	Deformace pro elasto-plastický materiál v kořeni vrubu	[-]
$\varepsilon^N$	Horní odhad deformace v kořeni vrubu	[-]
$\varepsilon_{eq}^p$	Ekvivalentní elasto-plastická deformace	[-]
$\nu$	Poissonova konstanta	[-]
$\sigma_0$	Mez kluzu	[MPa]
$\sigma^e$	Napětí pro elastický materiál v kořeni vrubu	[MPa]
$\sigma_{eq}$	Redukované napětí dle hypotézy HMM	[MPa]
$\sigma^E$	Dolní odhad napětí v kořeni vrubu	[MPa]
$\sigma^{MKP}$	Napětí pro elasto-plastický materiál v kořeni vrubu	[MPa]
$\sigma_{nF}$	Tahové normálové napětí	[MPa]

$\sigma_{nM}$	Ohybové normálové napětí	[MPa]
$\sigma_{np}$	Normálové napětí od vnitřního přetlaku	[MPa]
$\sigma^N$	Horní odhad napětí v kořeni vrubu	[MPa]
$\tau$	Smykové napětí	[MPa]
$\tau^*$	Limitní smykové napětí	[MPa]
$\tau_n$	Normálové napětí od krouticího momentu	[MPa]
$\rho$	Poloměr zaoblení vrubu	[mm]

# 1. ÚVOD

Vruby patří mezi jeden z hlavních zdrojů iniciátorů lomů těles. Tyto konstrukční vruby jsou v praxi nezbytné z hlediska funkce zařízení, a proto je důležité je podrobněji zkoumat.

Konstrukční vruby patří mezi koncentrátoři napětí, jelikož u zatížené součásti nacházíme v jeho blízkosti lokální extrém napětí. Pokud by koncentrace napětí byla tak velká, že by v okolí vrubu vznikla elasto-plastická deformace, nemůžeme v dané oblasti počítat s Hookeovým zákonem o ryze elastických deformacích a úloha se stává početně složitější.

V současnosti existuje celá řada metod popisující pole napětí v okolí vrubu. Nejstarší a nejznámější vycházejí z ekvivalentních energií. Můžeme zde zařadit dva přístupy – podle Neubergera [1] a Glinky [2]. Jejich podstata spočívá v tom, že hustota vhodně zvolené energie v daném místě součásti je stejná pro lineární elastický materiál a zároveň i pro nelineární elasto-plastický materiál. Abychom tedy mohli tyto metody využít, musíme znát napěťové i deformační pole pro lineární elastický materiál a konstitutivní vztah pro nelineární elasto-plastický materiál. Energetickou ekvivalenci lze uvažovat jak pro proporcionální zatěžování, tak i pro neproporcionální, jehož matematický popis je složitější. Ostatní přístupy k tomuto problému ve velké míře vycházejí z poznatků vědců Neubergera a Glinky. Jmenujme například metodu Knop [3], Ye & Suzuki [4] (vychází ze zkoumání termodynamiky procesu zatěžování a ukazuje, že Glinkova metoda je obecnější, než-li Neubergerova metoda).

První práce v uvedené problematice využívaly pouze analytické řešení. V dnešní době je však možné s výhodou aplikovat metodu konečných prvků (MKP), a tím umožnit využití pro libovolnou geometrii vrubu. Podrobnějšímu rozboru jednotlivých přístupů pro stanovení elasto-plastické odezvy konstrukce z elastického MKP řešení se věnuje následující kapitola.

Hlavním cílem diplomové práce je vytvoření algoritmů pro stanovení elasto-plastické odezvy v kořeni vrubu v programu ANSYS APDL, které automaticky zpracují MKP modely (viz kapitola 4) a následně stanoví horní a dolní napětí a deformace v kořeni vrubu (viz kapitola 5). Makro obsahuje jak výpočet bilineárního, tak i nelineárního materiálu s konstituční rovnicí odpovídající Armstrong-Frederickovu modelu, pro který je třeba nově odvodit soustavu rovnic pro stanovení dolního a horního odhadu. Výhodou takového zavedení nelineárního zpevnění je zejména možnost přímého srovnání s elasto-plastickým výpočtem MKP v programu Ansys, kde je nelineární kinematický model zpevnění založený na Armstrong-Frederickově evolučním pravidlu implementován. V dostupné odborné literatuře nebylo nalezeno podobné řešení. (viz kapitola 5.2).

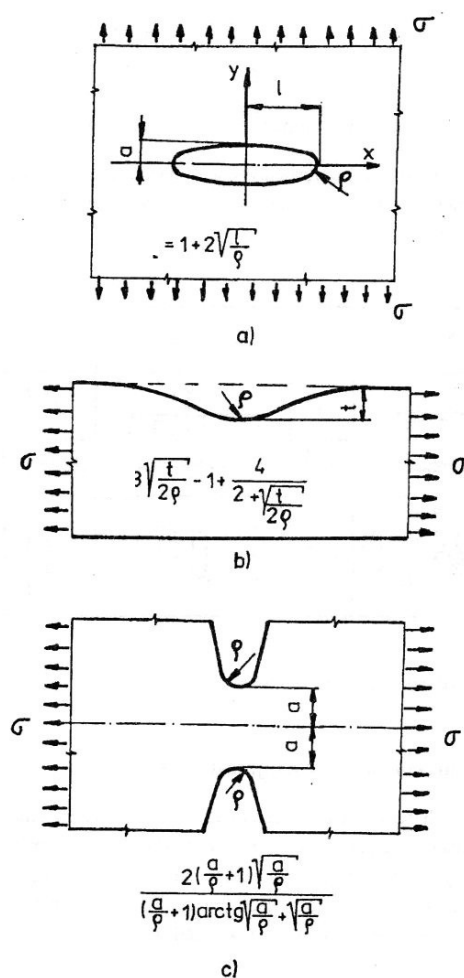
Poněvadž programovací jazyk Matlab umožňuje kratší a efektivnější způsob zápisu, jsou přepočty napětí a deformace aplikovány i zde. Uživatel se tak snadněji zorientuje v dané problematice.

## 2. ANALÝZA EXISTUJÍCÍ REŠERŠE MOŽNÝCH REŠENÍ

V této kapitole bude popsána jak původní práce Neuber, tak vybrané metody popsané v dostupné rešerši [10], která byla vytvořena v roce 2011 v rámci projektu FADOFF podpořeného Technologickou agenturou ČR.

### 2.1 Neuberova metoda

Neuber v roce 1958 vydal knihu „Kerbspannungslehre – Theorie der Spannungskonzentration Genaue Berechnung der Festigkeit [5]“. Z jeho práce vyplynulo, že hlavní vliv na velikost součinitele koncentrace napětí  $K_t$  má poloměr zakřivení kořene vrubu a jeho tloušťka. Na následujícím obrázku jsou vykresleny 3 příklady vrubů s vyjádřenou velikostí součinitele koncentrace napětí:



Obr. 1 Tři příklady vrubů s vyjádřenou velikostí součinitele koncentrace napětí [6]

Roku 1961, kdy působil na německé univerzitě v Mnichově jako profesor na katedře mechaniky a vedoucí materiálové laboratoře, publikoval v časopise Journal of Applied Mechanics sedmistránkový článek s názvem „Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law [2]“.

V úvodu článku zdůrazňuje, že znalost koncentrace napětí je velmi důležitá pro celou řadu inženýrských úloh. Je zde uvedena návaznost na knihu z roku 1958 [5], kde je závislost deformace na napětí vyjádřena tímto vztahem:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\tau}{\left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau^*}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.1.1)$$

kde

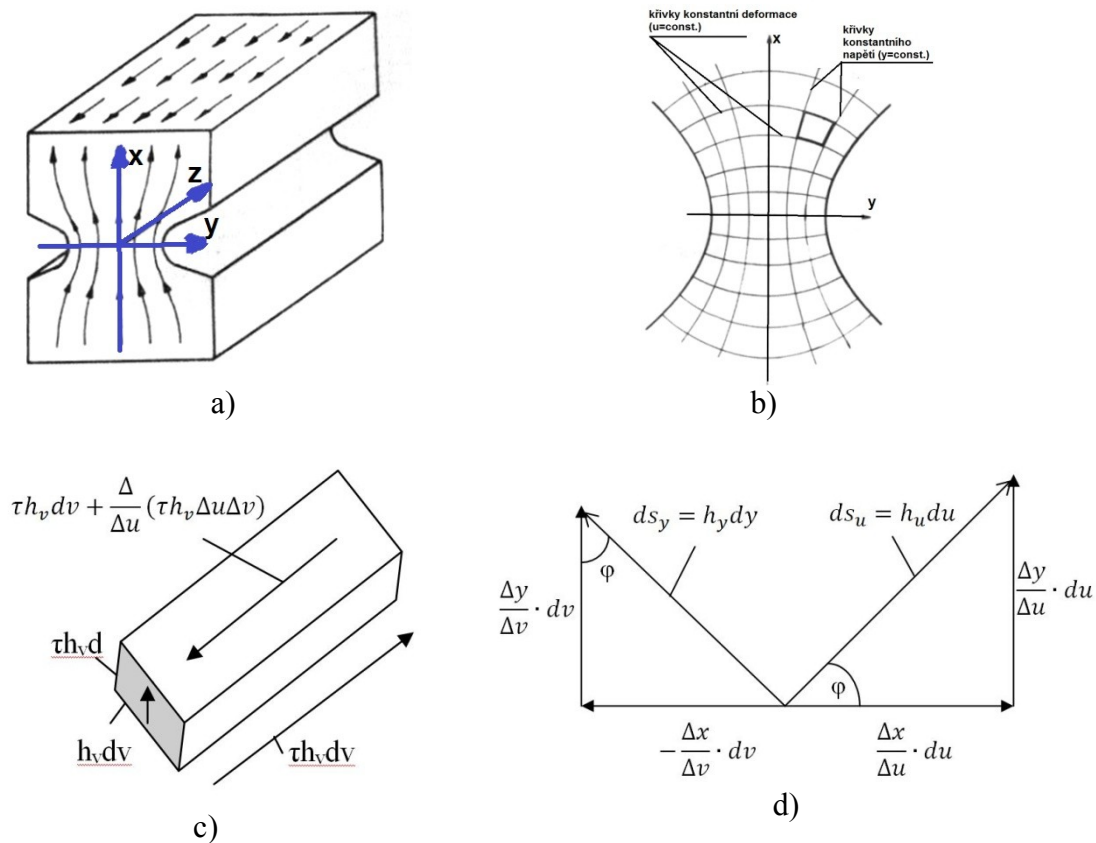
- $\tau$  [MPa] je smykové napětí
- $\tau^*$  [MPa] matematicky vyjadřuje hodnotu limitního smykového napětí, která dobře koresponduje s experimentálními výsledky v oblasti vrubu
- $\varepsilon$  [-] je deformace.

Bylo zapotřebí odvodit si geometrické závislosti na jednom elementu, rovněž vztahy mezi napětím a výškou elementu  $h_v$  i deformace a výškou elementu  $h_u$  (viz Obr. 2). Tyto poznatky poté byly aplikovány na ostrý vrub hyperbolického tvaru a následně bylo odvozeno tzv. Neuberovo pravidlo (2.1.2) pro výpočet hodnot napětí a deformace hyperbolických vrubů.

$$K_t^2 = K_\varepsilon \cdot K_\sigma = \frac{\varepsilon^N}{\varepsilon^e} \cdot \frac{\sigma^N}{\sigma^e}, \quad (2.1.2)$$

kde

- $K_t$  [-] je teoretický součinitel koncentrace napětí
- $K_\varepsilon$  [-] je součinitel koncentrace deformace
- $K_\sigma$  [-] je součinitel koncentrace napětí
- index  $e$  je pro lineární elastický materiál a  $N$  pro nelineární elasto–platický materiál.



Obr. 2 a) příklad modelu prizmatického tělesa, b) Příklad křivkového souřadného systému napěťových čar a čar konstantní deformace, c) rozložení sil na jednom elementu, d) geometrické závislosti

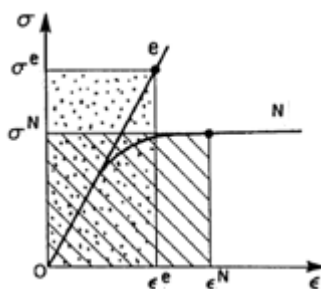
Až o 8 let později, v roce 1969, Topper a spol. jako první pojmenovali Neuberovu práci jako Neuberovo pravidlo. Učinili tak v časopise Journal of Materials a článek nazvali „Neuber’s Rule Applied to Fatigue of Notched Specimens [7]“. Také se ukázalo, že neplatí jen pro hyperbolické vruby, ale i pro většinu geometrií vrubů, a to s dostatečnou přesností.

Když bude součást podrobena rovinné napjatosti, tak v kořeni vrubu bude jednoosá napjatost, což lze vyjádřit na základě Neuberova pravidla takto:

$$\sigma^e \varepsilon^e = \sigma^N \varepsilon^N, \quad (2.1.3)$$

kde index  $e$  je pro lineární elastický materiál a  $N$  pro nelineární elasto–platický materiál.

Jako ekvivalentní veličina je zvolena hustota celkové deformační energie, která je definována jako součet hustoty deformační energie a hustoty doplňkové energie. Grafická interpretace je uvedena na Obr. 3:



Obr. 3 Grafická interpretace Neuberova pravidla

## 2.2 Glinkova metoda

Roku 1981, kdy působil na polské univerzitě ve Varšavě, publikoval, společně s Krzysztofem Molskim, v časopise Materials Science and Engineering osmistránkový článek s názvem „A method of Elastic – Plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root [2]“. Glinka zvolil jako ekvivalentní veličinu hustotu celkové deformační energie. Tuto metodu můžeme v odborné literatuře nalézt pod označením ESED (the equivalent strain energy density).

Jelikož je napětí nerovnoměrně rozloženo vzhledem ke geometrii vrubu, tak každý bod na něm absorbuje odlišné množství energie. Za předpokladu jednoosé napjatosti v kořeni vrubu a lineárně elastického chování materiálu platí:

$$W^e = \int_0^{\epsilon^e} \sigma^e d\epsilon^e = \frac{\sigma^{2e}}{2E} \quad (2.2.1)$$

$$W^E = \int_0^{\epsilon^E} \sigma^E d\epsilon^E = \frac{\sigma^{2E}}{2E} \quad (2.2.2)$$

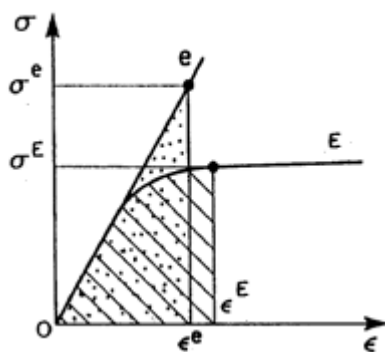
$$\int_0^{\epsilon^e} \sigma^e d\epsilon^e = \int_0^{\epsilon^E} \sigma_{22}^E d\epsilon^E \quad (2.2.3)$$

$$K_t = \left( \frac{W^E}{W^e} \right)^{0,5} \quad (2.2.4)$$

kde index e je pro lineární elastický materiál a E pro nelineární elasto-plastický materiál.



Grafická interpretace je uvedena na obrázku Obr. 4:



Obr. 4 Grafická interpretace Glinkovy metody

Dále Glinka využívá znalosti Neuberova pravidla (2.1.2) a při svých úvahách používá konstitutivní rovnici (2.2.5)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (2.2.5)$$

kterou upravil za pomoci rovnic číslo (2.1.2), (2.2.1) až (2.1.4) na tvar (2.2.6):

$$\frac{(K_t \sigma^e)^2}{2E} = \frac{\sigma^{2E}}{2E} + \frac{\sigma'^E}{n' + 1} \left( \frac{\sigma'^E}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (2.2.6)$$

kde  $K'$  [MPa] a  $n'$  [-] jsou materiálové parametry.

Pro cyklické zatížení s proměnnými  $\sigma^e, \sigma^E$  a  $\varepsilon^N$ , lze konstitutivní rovnici (2.2.5) upravit na následující tvar:

$$\frac{(K_t \Delta \sigma^e)^2}{4E} = \frac{\Delta \sigma^{2E}}{4E} + \frac{\Delta \sigma'^E}{n' + 1} \left( \frac{\Delta \sigma'^E}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.2.7)$$

V závěru autor článku uvádí srovnání jeho práce s MKP výpočty, Neuberovým pravidlem a experimentálními daty v několika grafech. Jedná se například o desku s kruhovým či eliptickým otvorem zatíženou tahem. Z grafů lze vyčíst, že jeho výsledné rovnice (2.2.6) a (2.2.7) dobře aproximují experimentální data.

## 2.3 Srovnání Neuberovy a Glinkovy metody

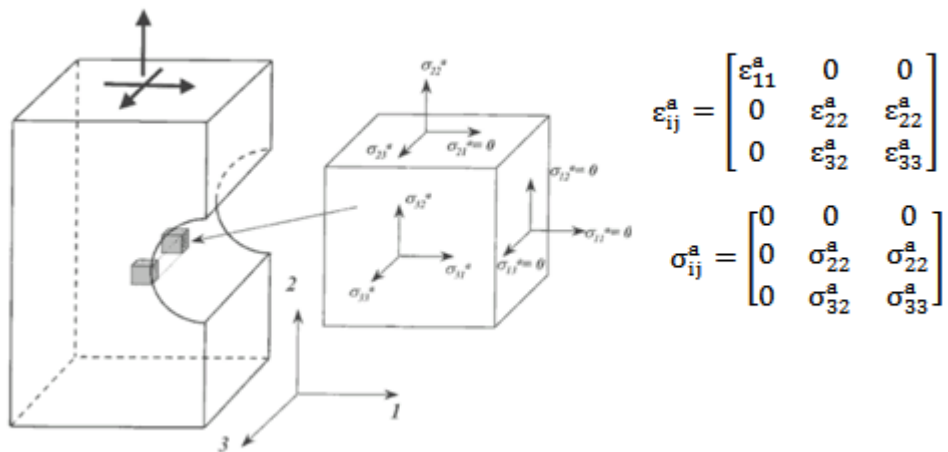
Srovnání výše popsaných metod nalezneme v časopise International Journal of Fracture ve třináctistránkovém článku s názvem „Fracture Calculation of elastoplastic strains and stresses in notches under multiaxial loading [8]“, který byl vydán v roce 1995. Je zde poukázáno na to, že pro případ rovinné napjatosti a deformace (viz Obr. 5), aktuální maximální hlavní napětí  $\sigma_{22}^a$  a maximální aktuální hlavní deformace  $\varepsilon_{22}^a$  často splňují vztahy (2.3.1). Navíc byla prokázána proporcionalita ryze elastického a obecného řešení (2.3.3). Autor pracuje s konstitutivní rovnicí (2.3.4) – Henckeho rovnice.

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^E &\leq \sigma_{22}^a \leq \sigma_{22}^N \\ \varepsilon_{22}^E &\leq \varepsilon_{22}^a \leq \varepsilon_{22}^N\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

Rovnici (2.3.1) můžeme zobecnit pro víceosý stav napjatosti:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^E \varepsilon_{ij}^E &\leq \sigma_{ij}^a \varepsilon_{ij}^a \leq \sigma_{ij}^N \varepsilon_{ij}^N \\ \int \sigma_{ij}^E d\varepsilon_{ij}^E &\leq \int \sigma_{ij}^a d\varepsilon_{ij}^a \leq \int \sigma_{ij}^N d\varepsilon_{ij}^N,\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

kde  $i, j$  jsou sčítací indexy 1, 2, 3.



Obr. 5 Rovinná napjatost a deformace

$$\frac{\sigma_{22}^e \varepsilon_{22}^e}{\sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e} = \frac{\sigma_{22}^a \varepsilon_{22}^a}{\sigma_{ij}^a \varepsilon_{ij}^a} \quad (2.3.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} S_{ij}, \quad (2.3.4)$$

kde redukované napětí  $\sigma_{eq}$  a redukovaná plastická deformace  $\varepsilon_{eq}^p$  a Kroneckerovo delta  $\delta_{ij}$  jsou:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} S_{ij} S_{ij}}, \quad \varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} = f(\sigma_{eq})$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ pro } i = j \text{ a } \delta_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

Funkce  $f(\sigma_{eq})$  je identická s relací mezi napětím a plastickou složkou deformace při tahové zkoušce.

Moftakhar [8] dále zkompletoval soustavu rovnic pro Neuberovu metodu, jejíž řešení poskytuje horní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu:

$$\varepsilon_1^N = -\frac{\nu}{E} (\sigma_2^N + \sigma_3^N) - \frac{f(\sigma_{eq}^N)}{2\sigma_{eq}^N} (\sigma_2^N + \sigma_3^N), \quad (2.3.5)$$

$$\varepsilon_2^N = \frac{1}{E} (\sigma_2^N - \nu \sigma_3^N) + \frac{f(\sigma_{eq}^N)}{\sigma_{eq}^N} \left( \sigma_2^N - \frac{1}{2} \sigma_3^N \right), \quad (2.3.6)$$

$$\varepsilon_3^N = \frac{1}{E} (\sigma_3^N - \nu \sigma_2^N) + \frac{f(\sigma_{eq}^N)}{\sigma_{eq}^N} \left( \sigma_3^N - \frac{1}{2} \sigma_2^N \right), \quad (2.3.7)$$

$$\sigma_{eq}^N = \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}, \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^N \varepsilon_2^N}{\sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N}, \quad (2.3.9)$$

$$\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e = \sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N, \quad (2.3.10)$$

a také pro Glinkovu metodu, jejíž řešení poskytuje dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu:

$$\frac{1}{2}(\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e) = \frac{1}{3E}(1 + \nu)(\sigma_{eq}^E) + \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) + \int_0^{\varepsilon_{eq}^{p\ E}} \sigma_{eq}^E d\varepsilon_{eq}^{p\ E}, \quad (2.3.11)$$

$$\varepsilon_1^E = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) - \frac{f(\sigma_{eq}^E)}{2\sigma_{eq}^E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E), \quad (2.3.12)$$

$$\varepsilon_2^E = \frac{1}{E}(\sigma_2^E - \nu\sigma_3^E) + \frac{f(\sigma_{eq}^E)}{\sigma_{eq}^E}\left(\sigma_2^E - \frac{1}{2}\sigma_3^E\right), \quad (2.3.13)$$

$$\varepsilon_3^E = \frac{1}{E}(\sigma_3^E - \nu\sigma_2^E) + \frac{f(\sigma_{eq}^E)}{\sigma_{eq}^E}\left(\sigma_3^E - \frac{1}{2}\sigma_2^E\right), \quad (2.3.14)$$

$$\sigma_{eq}^E = \sqrt{(\sigma_2^E)^2 - \sigma_2^E \sigma_3^E + (\sigma_3^E)^2}, \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\sigma_{22}^e \varepsilon_{22}^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E}{\sigma_2^E \varepsilon_2^E + \sigma_3^E \varepsilon_3^E}, \quad (2.3.16)$$

$$\varepsilon_{eq}^{p\ E} = f(\sigma_{eq}^E). \quad (2.3.17)$$

Další poznatek plynoucí ze článku [8] je specializace soustav pro bilineární materiál (2.3.18):

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & \text{pro } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_T}, & \text{pro } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (2.3.18)$$

Pro bilineární model materiálu lze soustavy Neuberovy a Glinkovy metody přepsat na tvar:

*Neuber:*

$$\varepsilon_1^N = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^N + \sigma_3^N) - \frac{\sigma_{eq}^N - \sigma_0}{2H_p} \left( \frac{\sigma_2^N + \sigma_3^N}{\sigma_{eq}^N} \right), \quad (2.3.19)$$

$$\varepsilon_2^N = \frac{1}{E}(\sigma_2^N - \nu\sigma_3^N) + \frac{\sigma_{eq}^N - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_2^N - \frac{1}{2}\sigma_3^N}{\sigma_{eq}^N} \right), \quad (2.3.20)$$

$$\varepsilon_3^N = \frac{1}{E}(\sigma_3^N - \nu\sigma_2^N) + \frac{\sigma_{eq}^N - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_3^N - \frac{1}{2}\sigma_2^N}{\sigma_{eq}^N} \right), \quad (2.3.21)$$

$$\sigma_{eq}^N = \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}, \quad (2.3.22)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^N \varepsilon_2^N}{\sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N}, \quad (2.3.23)$$

$$\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e = \sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N, \quad (2.3.24)$$

$$H_p = \frac{EE_T}{E - E_T}. \quad (2.3.25)$$

*Glinka:*

$$\frac{1}{2}(\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e) = \frac{1}{3E}(1 + \nu)(\sigma_{eq}^E) + \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) + \frac{(\sigma_{eq}^E)^2 - \sigma_0^2}{2H_p}, \quad (2.3.26)$$

$$\varepsilon_1^E = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) - \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{2H_p} \left( \frac{\sigma_2^E + \sigma_3^E}{\sigma_{eq}^E} \right), \quad (2.3.27)$$

$$\varepsilon_2^E = \frac{1}{E}(\sigma_2^E - \nu\sigma_3^E) + \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_2^E - \frac{1}{2}\sigma_3^E}{\sigma_{eq}^E} \right), \quad (2.3.28)$$

$$\varepsilon_3^E = \frac{1}{E}(\sigma_3^E - \nu\sigma_2^E) + \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_3^E - \frac{1}{2}\sigma_2^E}{\sigma_{eq}^E} \right), \quad (2.3.29)$$

$$\sigma_{eq}^E = \sqrt{(\sigma_2^E)^2 - \sigma_2^E \sigma_3^E + (\sigma_3^E)^2}, \quad (2.3.30)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E}{\sigma_2^E \varepsilon_2^E + \sigma_3^E \varepsilon_3^E}, \quad (2.3.31)$$

$$H_p = \frac{EE_T}{E - E_T}. \quad (2.3.32)$$

## 2.4 Přístupy ekvivalentních energií pro neproporcionální zatěžování

V předchozích třech podkapitolách byly popsány metody z pohledu proporcionálního zatěžování. Obě tyto metody byly později rozšířeny na neproporcionální zatěžování [9], jehož řešení vyžaduje obecnější přístup. Teorie plasticity předpokládá, že pokud deviátor tenzoru napětí není v průběhu zatěžování proporcionální, je konečné pole napjatosti a deformace závislé na historii zatěžování. V opačném případě je pole deformace funkcí pouze konečného stavu pole napjatosti. Pro případ neproporcionálního deviátoru tenzoru napětí je nutné využití přírůstkového tvaru pro vztahy, které budou popsány v této kapitole. Jako konstitutivní rovnice byl použit Prandtlův-Reussův vztah (2.4.1) pro izotropní tělesa:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \Delta \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \Delta \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} S_{ij}, \quad (2.4.1)$$

kde

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \Delta \varepsilon_{eq}^p = \frac{df(\sigma_{eq})}{d\sigma_{eq}} \Delta \sigma_{eq} \quad \varepsilon_{eq}^p = f(\sigma_{eq})$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ pro } i = j \text{ a } \delta_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

Autor [9] odvodil soustavu sedmi rovnic o sedmi neznámých jako pro Neuberovu metodu (obecně vyjádřenou):

$$\Delta \varepsilon_{11}^N = -\frac{\nu}{E} (\Delta \sigma_{22}^N + \Delta \sigma_{33}^N) - \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pN}}{2 \sigma_{eq}^N} (\sigma_{22}^N + \sigma_{33}^N), \quad (2.4.2)$$

$$\Delta \varepsilon_{22}^N = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_{22}^N - \nu \Delta \sigma_{33}^N) + \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pN}}{2 \sigma_{eq}^N} (2 \sigma_{22}^N - \sigma_{33}^N), \quad (2.4.3)$$

$$\Delta \varepsilon_{33}^N = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_{33}^N - \nu \Delta \sigma_{22}^N) + \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pN}}{2 \sigma_{eq}^N} (2 \sigma_{33}^N - \sigma_{22}^N), \quad (2.4.4)$$

$$\varepsilon_{23}^N = \frac{1+\nu}{E} \Delta \sigma_{23}^N + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pN}}{\sigma_{eq}^N} \Delta \sigma_{23}^N, \quad (2.4.5)$$

$$\Delta \Omega^e = \Delta \Omega^N, \quad (2.4.6)$$

$$\Delta \Omega^e = \sigma_{22}^e \Delta \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^e \Delta \sigma_{22}^e + \sigma_{33}^e \Delta \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^e \Delta \sigma_{33}^e + 2 \sigma_{23}^e \Delta \varepsilon_{23}^e + 2 \varepsilon_{23}^e \Delta \sigma_{23}^e, \quad (2.4.7)$$

$$\Delta \Omega^N = \sigma_{22}^N \Delta \varepsilon_{22}^N + \varepsilon_{22}^N \Delta \sigma_{22}^N + \sigma_{33}^N \Delta \varepsilon_{33}^N + \varepsilon_{33}^N \Delta \sigma_{33}^N + 2 \sigma_{23}^N \Delta \varepsilon_{23}^N + 2 \varepsilon_{23}^N \Delta \sigma_{23}^N, \quad (2.4.8)$$

$$\sigma_{22}^e \Delta \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^e \Delta \sigma_{22}^e = \sigma_{22}^N \Delta \varepsilon_{22}^N + \varepsilon_{22}^N \Delta \sigma_{22}^N \quad (2.4.9)$$

$$\sigma_{33}^e \Delta \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^e \Delta \sigma_{33}^e = \sigma_{33}^N \Delta \varepsilon_{33}^N + \varepsilon_{33}^N \Delta \sigma_{33}^N \quad (2.4.10)$$

$$\sigma_{23}^e \Delta \varepsilon_{23}^e + \varepsilon_{23}^e \Delta \sigma_{23}^e = \sigma_{23}^N \Delta \varepsilon_{23}^N + \varepsilon_{23}^N \Delta \sigma_{23}^N \quad (2.4.11)$$

$$(\sigma_{eq}^N)^2 = (\sigma_{22}^N)^2 + (\sigma_{33}^N)^2 - \sigma_{22}^N \sigma_{33}^N + 3(\sigma_{23}^N)^2 \quad (2.4.12)$$

tak pro Glinkovu metodu (obecně vyjádřenou):

$$\Delta \varepsilon_{11}^E = -\frac{\nu}{E} (\Delta \sigma_{22}^E + \Delta \sigma_{33}^E) - \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pE}}{2\sigma_{eq}^E} (\sigma_{22}^E + \sigma_{33}^E), \quad (2.4.13)$$

$$\Delta \varepsilon_{22}^E = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_{22}^E - \nu \Delta \sigma_{33}^E) + \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pE}}{2\sigma_{eq}^E} (2\sigma_{22}^E - \sigma_{33}^E), \quad (2.4.14)$$

$$\Delta \varepsilon_{33}^E = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_{33}^E - \nu \Delta \sigma_{22}^E) + \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pE}}{2\sigma_{eq}^E} (2\sigma_{33}^E - \sigma_{22}^E), \quad (2.4.15)$$

$$\Delta \varepsilon_{23}^E = \frac{1+\nu}{E} \Delta \sigma_{23}^E + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^{pE}}{\sigma_{eq}^E} \Delta \sigma_{23}^E, \quad (2.4.16)$$

$$\sigma_{22}^e \Delta \varepsilon_{22}^e + \sigma_{33}^e \Delta \varepsilon_{33}^e + 2\sigma_{23}^e \Delta \varepsilon_{23}^e = \sigma_{22}^E \Delta \varepsilon_{22}^E + \sigma_{33}^E \Delta \varepsilon_{33}^E + 2\sigma_{23}^E \Delta \varepsilon_{23}^E \quad (2.4.17)$$

$$\sigma_{22}^e \Delta \varepsilon_{22}^e = \sigma_{22}^E \Delta \varepsilon_{22}^E \quad (2.4.18)$$

$$\sigma_{33}^e \Delta \varepsilon_{33}^e = \sigma_{33}^E \Delta \varepsilon_{33}^E \quad (2.4.19)$$

$$\sigma_{23}^e \Delta \varepsilon_{23}^e = \sigma_{23}^E \Delta \varepsilon_{23}^E \quad (2.4.20)$$

$$(\sigma_{eq}^E)^2 = (\sigma_{22}^E)^2 + (\sigma_{33}^E)^2 - \sigma_{22}^E \sigma_{33}^E + 3(\sigma_{23}^E)^2 \quad (2.4.21)$$

Pro řešení úlohy konečného napětí a deformace v kořeni vrubu je třeba vyřešit napětí a deformaci pro každý přírůstek zatížení od počátečního bodu zatěžování až do konečného bodu zatěžování. Počáteční stav zatěžování je dán vznikem plastické deformace v kořeni vrubu a lze jej tedy určit pomocí výpočtu s ryze elastickým materiálem. Pro každý přírůstek zatížení lze následně určit napětí a deformaci v kořeni vrubu.

Výhodou je, že pro obecně vyjádřené metody lze řešit jak jednoosé, víceosé proporcionální, tak i víceosé neproporcionální zatěžovací cesty. Výsledné rovnice poskytují dolní a horní odhad pro deformace v kořeni vrubu. Metody jsou slabě závislé na zvoleném souřadnicovém systému.

## **2.5 Ostatní aproximační metody pro stanovení napjatosti a deformace ve vrubech**

Jak již bylo zmíněno v úvodu, v současnosti již existuje celá řada přístupů pro stanovení napjatosti a deformace ve vrubech. V roce 2011 byl napsán dokument [10], ve kterém nalezneme dalších šest metod (např. Knop [3], Ye & Suzuki [4]). Výhodou tohoto dokumentu je to, že obsahuje i poznatky z teorie plasticity, experimentální poznatky týkající se chování materiálů a další kapitoly, jež ocení zejména ti, kteří se danou problematikou teprve začínají zabývat.

Ke každé metodě nalezneme [10] odkazy na příslušnou literaturu, což uživateli zjednoduší hledání. Všechny jsou zařazeny pod samostatnou podkapitolu, u každé z nich nalezneme formulaci problému, z jakých poznatků autor vycházel a v neposlední řadě výhody i nevýhody metody. Můžeme si také všimnout, že nové přístupy byly formulovány až ve 21. století.



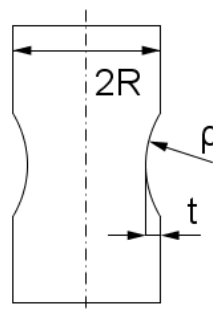
### 3. ANALÝZA DOSTUPNÝCH EXPERIMENTÁLNÍCH DAT VHODNÝCH PRO TESTOVÁNÍ

V literatuře je dostupná celá řada experimentů provedených na vrubovaných vzorcích. V této práci je provedeno srovnání vždy s elasto-plastickým výpočtem MKP, byly však řešeny případy související s experimenty, které budou nyní popsány. Experimenty lze použít také pro ověření platnosti dolního a horního odhadu.

#### 3.1 Geometrie zkušebních vzorků

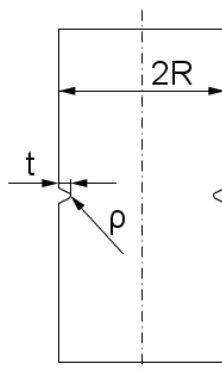
Zkušební vzorky jsou ve tvaru plného a dutého válce s U a V vruby. Během experimentu byly odzkoušeny celkem tři druhy vrubu [11]:

- *Typ 1 – mělký hladký U vrub*



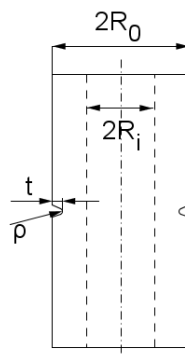
Obr. 6 Mělký hladký vrub

- *Typ 2 a) – mělký ostrý V vrub (plný válec)*



Obr. 7 Mělký ostrý vrub

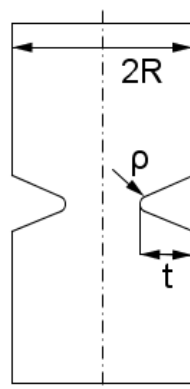
- *Typ 2 b) – mělký ostrý V vrub (dutý válec – trubka)*



Obr. 8 Mělký ostrý vrub

Tento typ vzorku byl ověřován pouze početně v systému ABAQUS, nikoli experimentem

- *Typ 3 – hluboký ostrý V vrub*



Obr. 9 Hluboký ostrý vrub

Rozměry vzorků lze popsat následujícími poměry rozměrů:

Typ 1	$\frac{\rho}{t} = 3,5 \quad \frac{R}{t} = 7$	(3.1.1)
Typ 2 a)	$\frac{\rho}{t} = 0,3 \quad \frac{R}{t} = 7$	(3.1.2)
Typ 2 b)	$\frac{\rho}{t} = 0,3 \quad \frac{R_0}{t} = 67 \quad \frac{R_0}{R_i} = 1,118$	(3.1.3)
Typ 3	$\frac{\rho}{t} = \frac{3}{35} \quad \frac{R}{t} = 2$	(3.1.4)

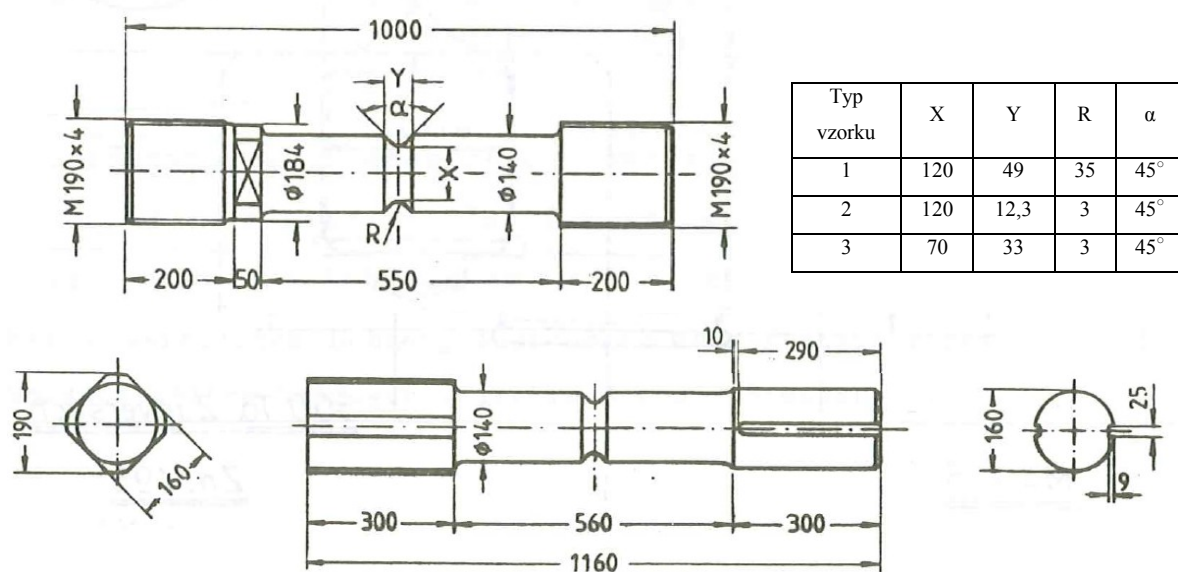
Při realizaci pokusů a výpočtů se jednalo konkrétně o tyto hodnoty rozměrů:

Typ 1	$\rho = 35 \text{ mm}, \quad R = 70 \text{ mm}, \quad t = 10 \text{ mm}$	(3.1.5)
Typ 2 a)	$\rho = 3 \text{ mm}, \quad R = 70 \text{ mm}, \quad t = 10 \text{ mm}$	(3.1.6)
Typ 2 b)	$\rho = 3 \text{ mm}, R_0 = 70 \text{ mm}, R_i = 62,6 \text{ mm} \quad t = 1,04 \text{ mm}$	(3.1.7)
Typ 3	$\rho = 3 \text{ mm}, \quad R = 70 \text{ mm}, \quad t = 35 \text{ mm}$	(3.1.8)

Když se stanovoval poloměr vrubu u plných vzorků, tak bylo zjištěno, že z výrobních důvodů nemůže být menší než 3 mm. Průměr vzorku musí být 140 mm, aby bylo dosaženo požadované ostrosti (či mělkosti) u všech typů vrubů.

Plné vzorky byly zhotoveny z polotovarů o průměru přibližně 200 mm. Ostré vruby byly vyrobeny na číslicově řízeném soustruhu Carl Schenck AK v německém městě Darmstadt. V tomto městě se nachází Technická univerzita Darmstadt, a proto je Darmstadt významným vědeckým centrem.

Celková délka plného vzorku je při namáhání tahovou silou 1 000 mm a při všech ostatních případech 1 600 mm.



Obr. 10 Celkové rozměry plných zkušebních vzorků [11]

### 3.2 Typ zatížení vzorků

Materiál	Typ vzorku	Tahová síla	Ohyb	Krut	Tahová síla + krut	Ohyb + krut
Ideální elasto – plastický	1	□	□	□	□	□
	2 a)	□	□	□	□	
	3	□	□	□	□	
Reálný materiál	1	□○	□○	□○	□○	□○
	2 a)	□○	□○	□○		○
	3	□○	□○	□		○

Tab. 1 Typy zatížení plných vzorků – experiment 1: ○ = experiment, □ = MKP [11]

V Tab. 1 jsou uvedeny všechny kombinace zatížení a typu materiálu plných vzorků, které byly během experimentu, či konečnoprvkového výpočtu, zkoumány. Kruhovka značka odpovídá pokusu a čtvercová numerickému výpočtu. Pro velikost nominálního normálového napětí  $\sigma_{nF}$ , ohybového napětí  $\sigma_{nM}$ , smykové napětí  $\tau_n$  platí vztahy (3.2.1). Navíc poměr mezi tahovou silou a momentem je stále konstantní, proto i  $\tau_n/\sigma_{nF}$  je stále stejný a má velikost 0,5 a pro mělký hladký U vrub i 0,577 a 2,5.

$$\sigma_{nF} = \frac{F}{\pi(R-t)^2}, \sigma_{nM} = \frac{4M}{\pi(R-t)^3}, \tau_n = \frac{2T}{\pi(R-t)^3} \quad (3.2.1)$$

Pro kombinace zatížení tahové síly a krutu platí vztahy (3.2.2):

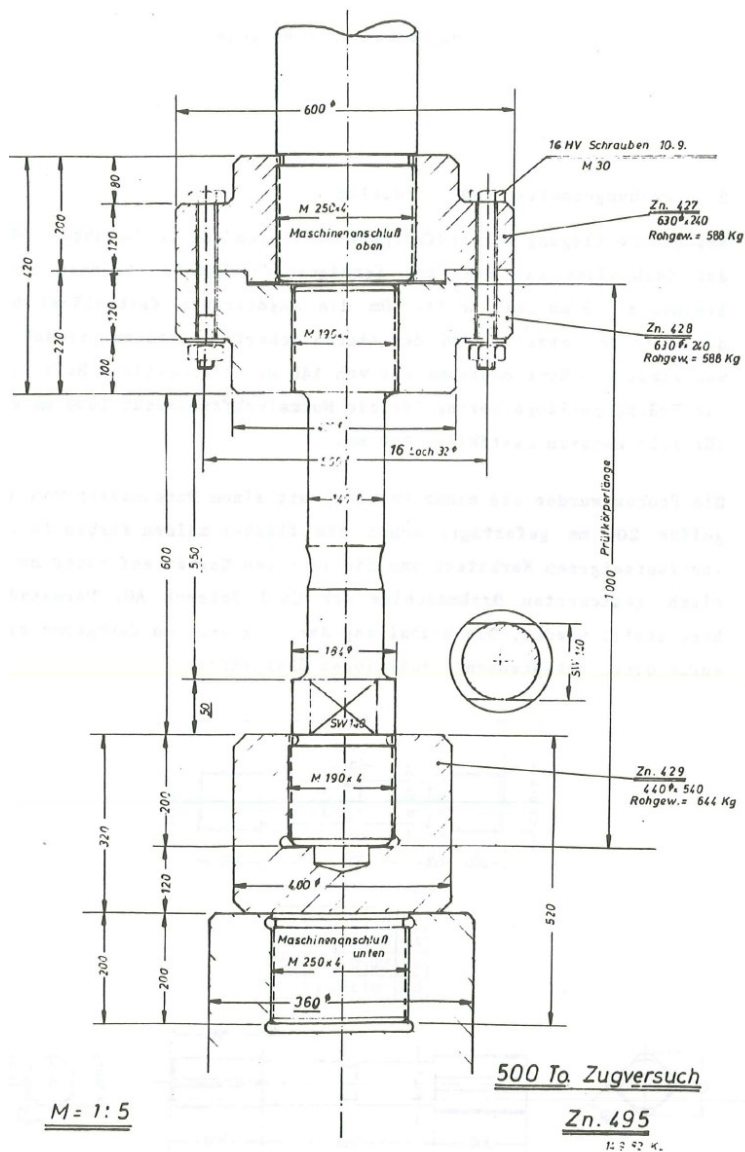
$$\sigma_{nF} = \frac{F}{\pi(R-t)^2}, \tau_n = \frac{2T}{\pi(R-t)^3}, \frac{\tau_n}{\sigma_{nF}} = 2,5 = \text{konst} \quad (3.2.2)$$

A poslední zkoumaná kombinace je u dutého válcového vzorku se současnou kombinací vnitřního přetlaku a tahové síly. Vznikají zde dvě normálová napětí od síly  $\sigma_{nF}$  a od vnitřního tlaku  $\sigma_{np}$ :

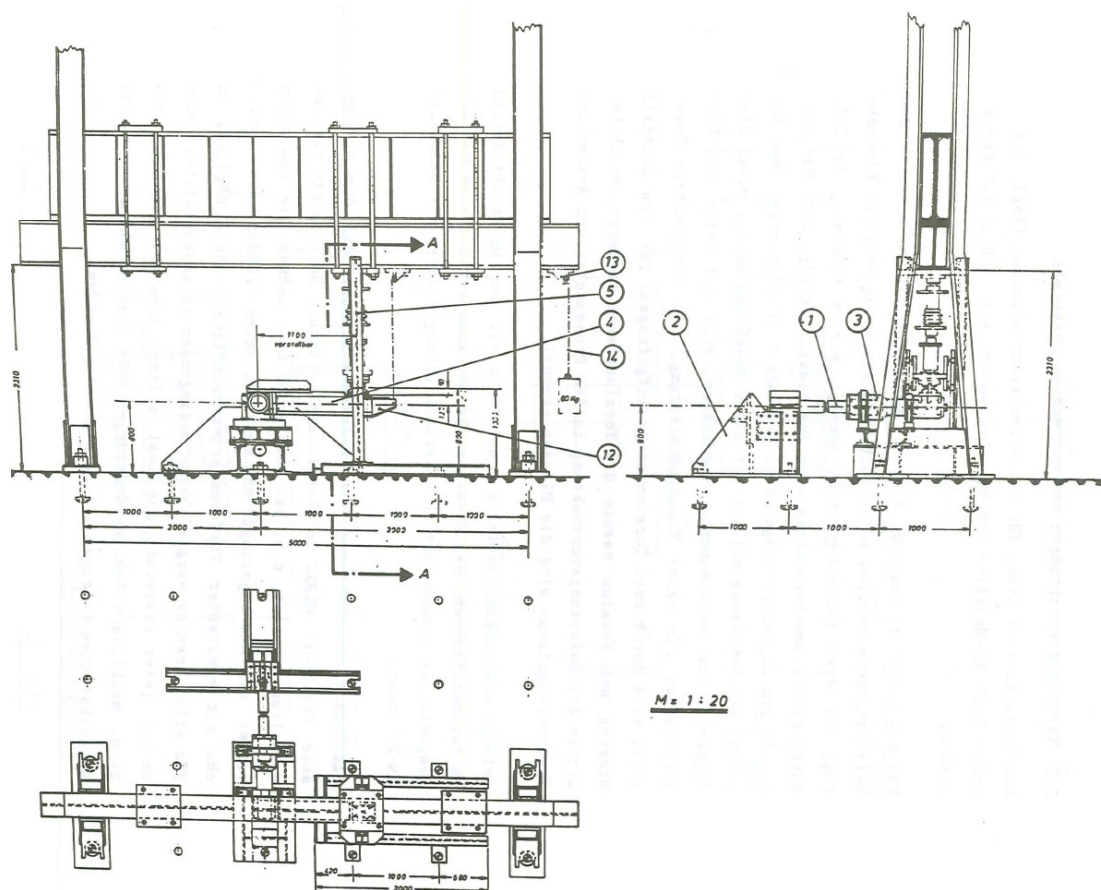
$$\sigma_{nF} = \frac{F}{\pi[(R_0-t)^2 - R_i^2]}, \sigma_{np} = \frac{pR_i}{(R_0-t-R_i)}, \frac{\sigma_{np}}{\sigma_{nF}} = 1,265 = \text{konst} \quad (3.2.3)$$

### 3.3 Experimentální zařízení a provedení pokusu

Celý pokus byl realizován na dvou zkušebních zařízeních. Jedno z nich bylo využito pro namáhání tahem (viz Obr. 11). Maximální tahová síla tohoto stroje je 5 000 kN. Druhé z nich bylo voleno tak, aby kombinovalo všechny zbývající zatížení – krut a ohyb (viz Obr. 12)

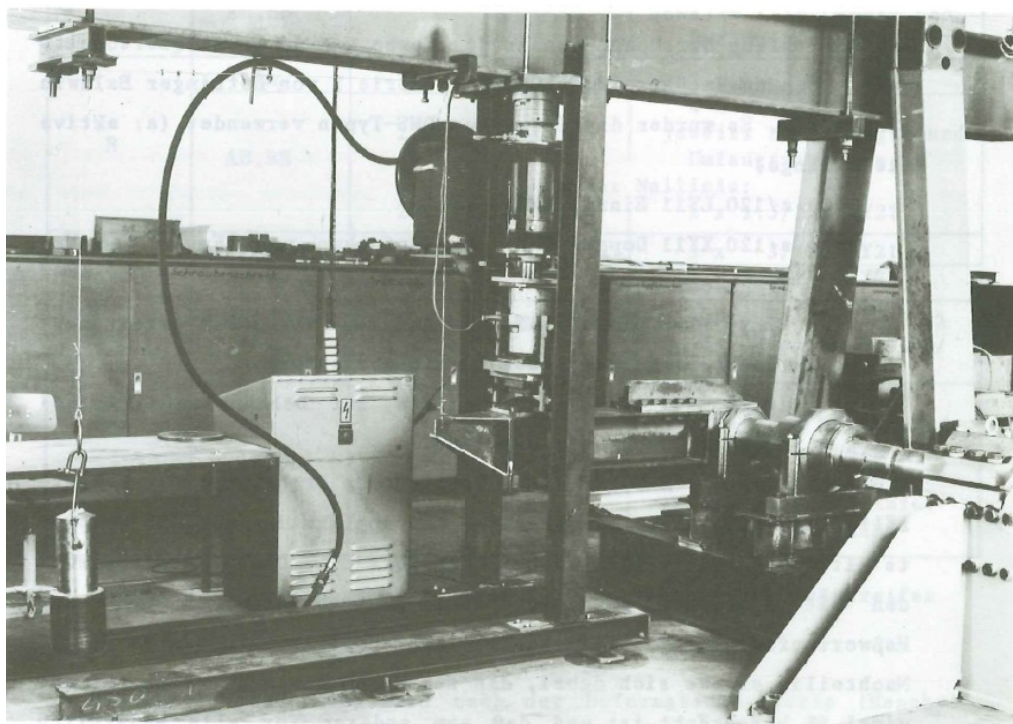


Obr. 11 Náskres zkušebního zařízení pro tah [11]



Obr. 12 Náčrso zkušebního zařízení pro krut a ohyb [11]

Reálná ukázka měření čistého krutu je zobrazena na Obr. 13:



Obr. 13 Měření krutu [11]

Experiment byl obtížný, jelikož použitý materiál v elasto-plastické oblasti vykazoval tečení. Z legislativních a technických důvodů nebylo možné pokusy provádět při konstantní rychlosti deformace. Aby byly podmínky všech testů srovnatelné, byla na každé úrovni zatížení udržována konstantní deformační rychlost. Jeden test probíhal mezi pěti až osmi hodinami.

### 3.4 Materiál zkušebních vzorků

Při výběru zkušebního materiálu pro experiment musely být splněny tyto požadavky:

- Mez pevnosti v tahu nesmí být vyšší než 350 MPa, jelikož z technických důvodů nesmí být radius vrubu menší než 3 mm. Tomuto požadavku vyhovuje materiál MK3X3, jeho materiálové vlastnosti jsou uvedeny v následující tabulce:

C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo
0,010	0,030	0,28	0,005	0,015	0,030	≤0,020
Ni	V	Al	Cu	N	Sn	
0,034	≤0,02	0,094	0,065	≤0,007	≤0,007	

Průměr zrna:	(0,1 – 0,2) mm
Smluvní mez kluzu $R_{p0,2}$ :	(102,5 ± 7,8) MPa
Mez pevnosti $R_m$ :	(279,2 ± 3,6) MPa
Tažnost A:	(47,4 ± 2,2) %

Tab. 2 Materiálové charakteristiky materiálu MK3X3 [11]

- Je pracováno s předpokladem homogenního materiálu (materiálové vlastnosti se nemění po celém průřezu). Tím je umožněno srovnávat experimenty s MKP výpočty.

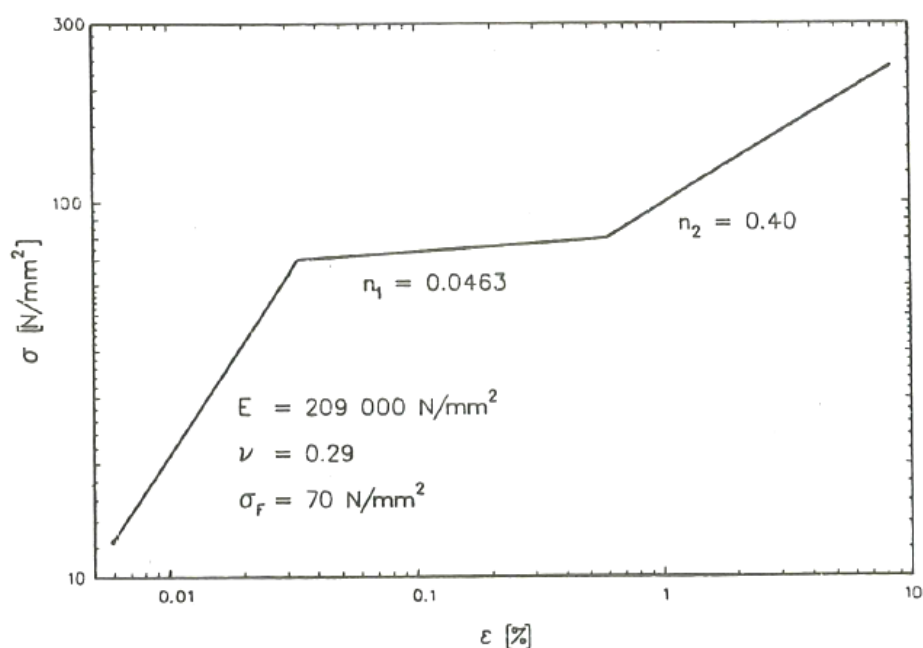
Vzorky dodala Arbed Saarlust a provedla zkoušky dodaného materiálu označeného jako MK3X3. Vlastnosti této oceli byly testovány tahovou zkouškou na šestapadesáti vzorcích podle DIN norem. Navíc na sedmdesáti leštěných vzorcích zjišťovali strukturu materiálu. Jejich výsledná data jsou shrnuta v Tab. 2.



Doplňující informace zjišťovala katedra mechaniky materiálu v Darmstadtu. Zkoumala celkem 13 vzorků při dvou deformačních rychlostech ( $\dot{\epsilon}_1 = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  a  $\dot{\epsilon}_2 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) a zjistila následující skutečnosti:

- Materiál lze doopravdy považovat za homogenní a zároveň izotropní
- Rychlost zatěžování má velký vliv na napětově–deformační křivku

Závislost napětí na deformaci byla určena u experimentu takto:



Obr. 14 Napětově – deformační křivka materiálu MK3X3 [11]

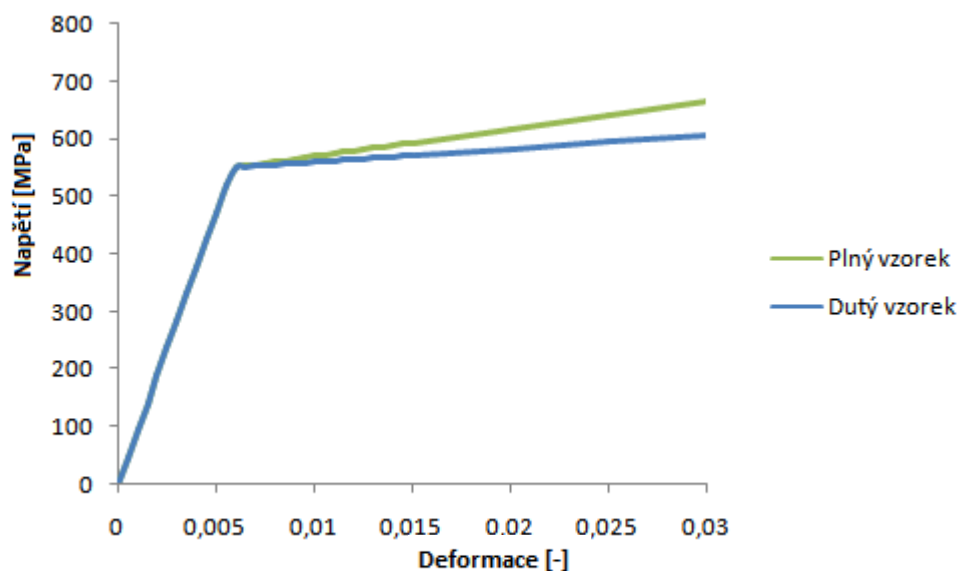
Matematický popis napětově – deformační křivky materiálu MK3X3:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot \epsilon, & \text{pro } \epsilon \leq 0,0335 \% \\ \sigma_{01} \left( \frac{E \cdot \epsilon}{\sigma_{01}} \right)^{n_1}, & \text{pro } 0,0335 \% < \epsilon \leq 0,6 \% \\ \sigma_{02} \left( \frac{E \cdot \epsilon}{\sigma_{02}} \right)^{n_2}, & \text{pro } 0,6 \% < \epsilon \end{cases} \quad (3.4.1)$$

$$E = 209\,000 \text{ MPa}; \nu = 0,29; n_1 = 0,0463; n_2 = 0,4;$$

$$\sigma_{01} = 70 \text{ MPa}, \sigma_{02} = 12,77 \text{ MPa}$$

U numerického výpočtu dutého vzorku 2b a plného vzorku 2a byl použit bilineární materiál s touto napětově deformační křivkou:



Obr. 15 Napětově – deformační křivka materiálu pro bilineární materiál

Matematický popis napětově–deformační křivky plného vzorku 2a zatíženého současným krutem a tahem:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & \text{pro } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_T}, & \text{pro } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$E = 94\,400 \text{ MPa}; \nu = 0,3; E_T = 0,05E; \sigma_0 = 550 \text{ MPa};$$

Matematický popis napětově–deformační křivky dutého vzorku:

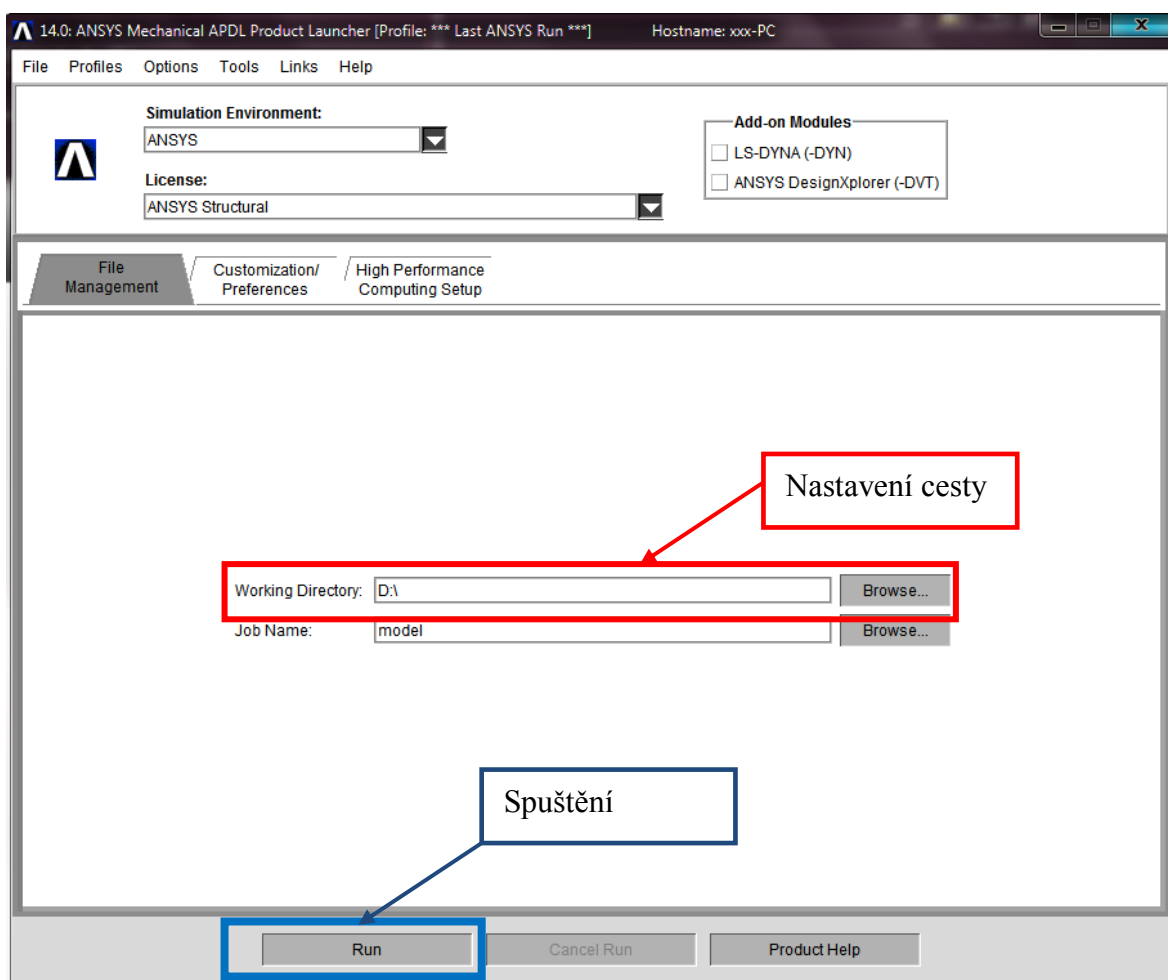
$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & \text{pro } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_T}, & \text{pro } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (3.4.3)$$

$$E = 94\,400 \text{ MPa}; \nu = 0,3; E_T = 0,0244E; \sigma_0 = 550 \text{ MPa};$$

## 4. TVORBA MKP MODELŮ

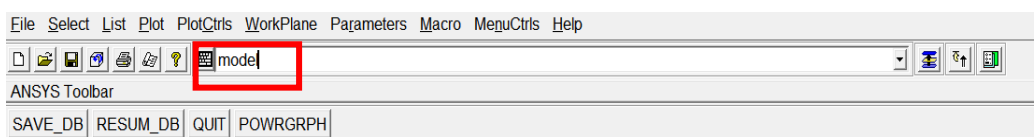
Pro vytvoření MKP modelů bylo vytvořeno makro v programu ANSYS APDL, které umožňuje automatickou tvorbu plných i dutých válců (trubek) s U či V vruby (viz Obr. 6 až Obr. 9). Geometrie modelů umožňuje zjednodušení na rovinnou axisymetrickou úlohu, a proto toho bylo využito. Navíc byla využita i symetrie, čili je počítáno s polovičním axisymetrickým modelem.

Po spuštění ANSYSu APDL je nutné nastavit cestu, na které jsou uložena výpočetní makra (viz příloha na CD-ROM), aby šla následně spustit (viz. Obr. 16).



Obr. 16 Nastavení cesty

Po založení nového souboru se vepíše do dialogového okna (command window) slovo model a tím se spustí (po stisknutí tlačítka enter) algoritmus pro tvorbu modelu (viz příloha na CD) – geometrie, materiálu, sítě, zatížení a uložení (viz Obr. 17).

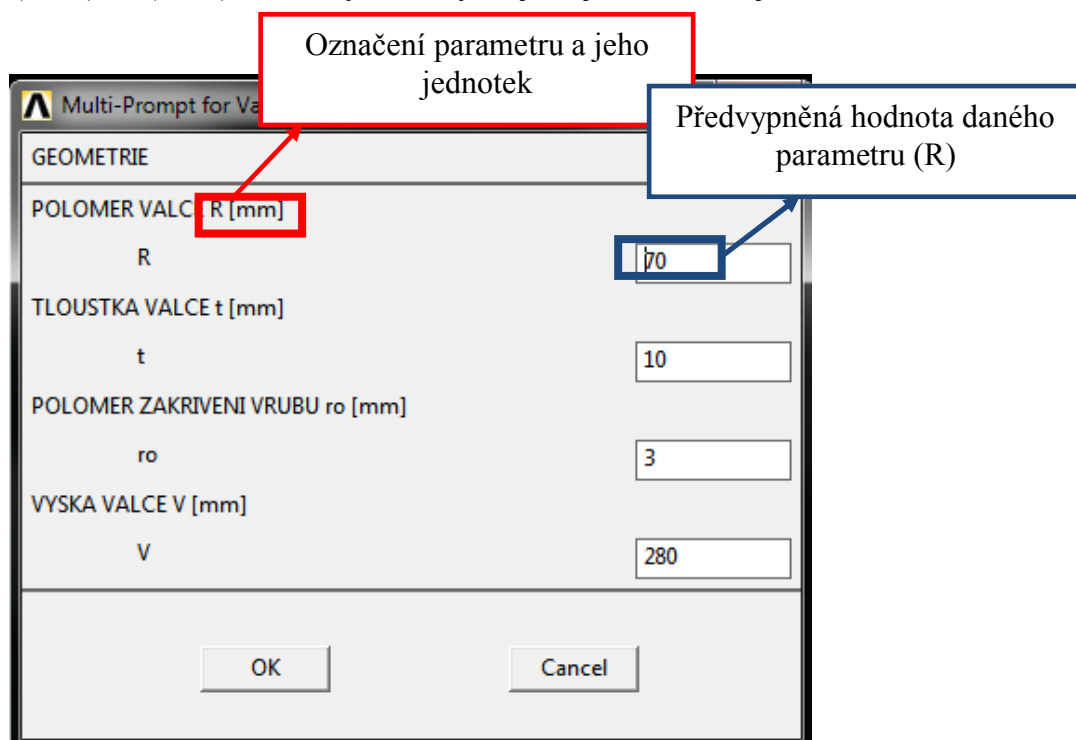


Obr. 17 Spuštění makra model

Jelikož byla zjištěna jistá nekompatibilita s verzí ANSYS 14 APDL, bylo vytvořeno makro Model14 (viz příloha na CD), které je univerzální pro starší i novější verze programu Ansys.

#### 4.1 Tvorba geometrie, volba materiálu a zatížení

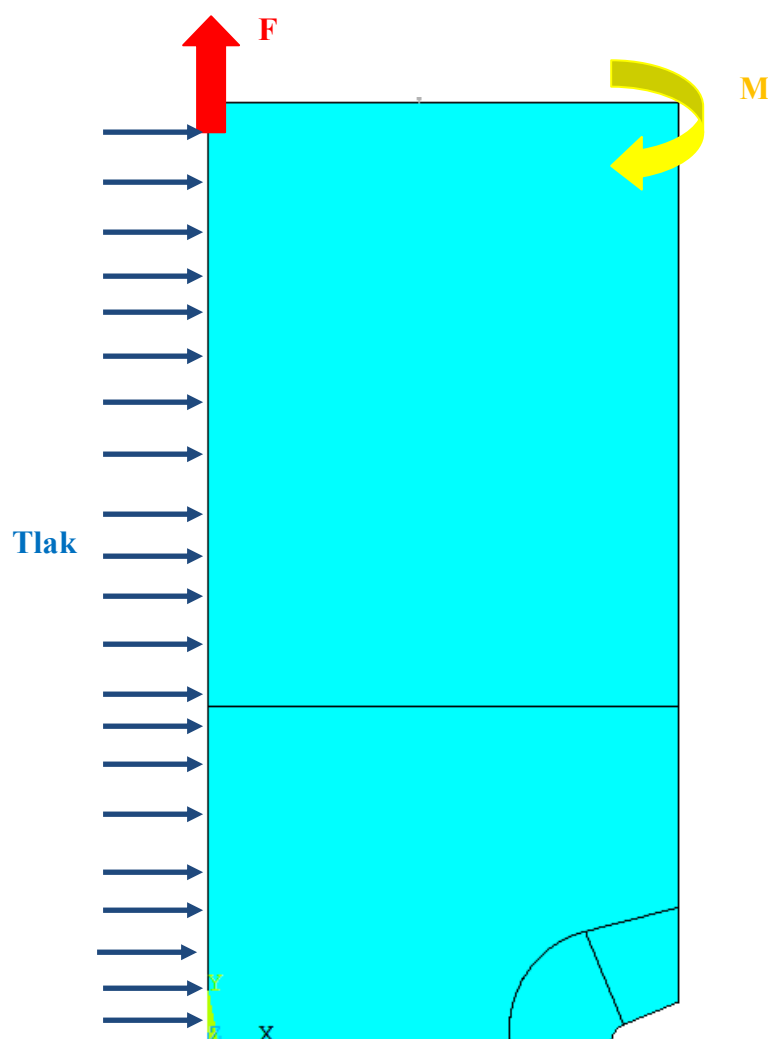
Vytvořený program, pojmenovaný model, uživatele postupně vyzývá, aby zadával jednotlivé parametry svého požadovaného modelu. První volba je mezi plným a dutým válcem. Následná série zadávaných parametrů se vztahuje k vybrané geometrii. Veškeré veličiny se zadávají v technických jednotkách, na což je upozorněno v každé kladené otázce (viz Obr. 18). Pokud uživatel stiskne OK či enter, aniž by vyplnil pole pro zadávání hodnot, algoritmus bude automaticky počítat s předvyplněnou hodnotou vyobrazenou na konci textu otázky. Tyto hodnoty nejsou určeny náhodně, ale jsou dány z rovnic (3.1.5) až (3.1.8). Všechny veličiny mají stejné označení jako na Obr. 6 až Obr. 9.



Obr. 18 Příklad zadávání veličin v programu model

Následuje volba materiálu pro výpočet. Zde jsou na výběr tři varianty. První z nich je elastický materiál. Po zadání čísla 0 do bílého pole bude uživatel vyzván k zadání modulu pružnosti a Poissonova čísla. Vybere-li si bilineární elasto-plastický materiál, musí udat nejen modul pružnosti a Poissonovo číslo, ale i mez kluzu a tečný modul v závislosti napětí-celková deformace v elasto-plastické oblasti. Poslední možností je nelineární elasto-plastický materiál – Armstrong Frederickův model, který má kromě meze kluzu dva materiálové parametry ( $C$  a  $\gamma$ ).

Poslední série dotazů se vztahuje k zatížení. U plného vzorku je na výběr krut, tah či kombinace obou a u trubky je navíc volba vnitřního přetlaku. Po výběru typu zatížení se zadávají jednotlivé hodnoty - tahové síly, momentu či vnitřního přetlaku. V následných výpočtech s nimi bude počítáno.

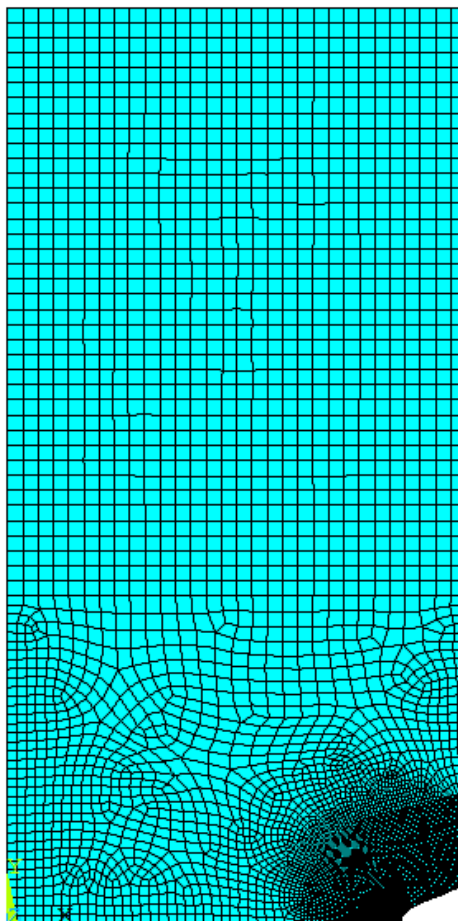


Obr. 19 Vykreslení aplikovaného zatížení

## 4.2 Typ prvku, síť a uložení modelu

Co se týče tvorby sítě, okrajových podmínek a nastavení typu prvku, tak ty jsou ošetřeny automaticky v makru Model i Model 14.

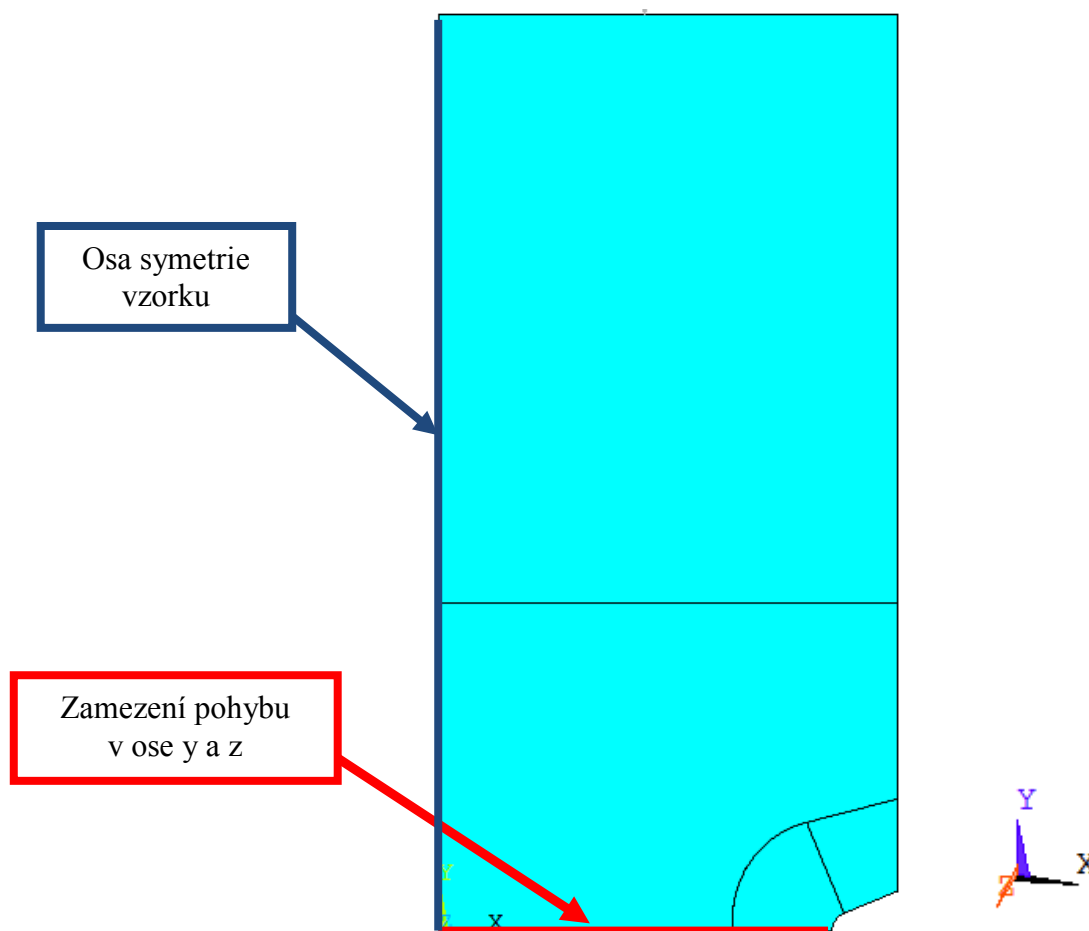
Na Obr. 20 je vyobrazen příklad konečnoprvkového modelu. Síť je vždy nejvíce zhuštěna v oblasti vrubu, jelikož zde dochází ke koncentraci napětí.



Obr. 20 Příklad vytvořené sítě

Jako prvek byl zvolen SOLID 272 [13], který umožňuje u axisymetrické úlohy zvolit i neaxisymetrické zatížení – krut.

Okrajové podmínky jsou zakresleny na Obr. 21. Na spodní hraně je zabráněno posuvu ve dvou osách – y, z. A je definována osa symetrie vzorku.



Obr. 21 Okrajové podmínky

Pro spuštění výpočtu a následné zpracování výsledků, bylo vytvořeno další makro Vypocty (viz příloha na CD), které se automaticky spustí z programu Model, pokud si to uživatel bude přát. Pokud si zvolí, že nechce po navolení všech potřebných parametrů ihned spustit výpočet, objeví se zpráva, která jej navede, jak spustit výpočetní program.

## 5. TVORBA SKRIPTŮ UMOŽŇUJÍCÍCH AUTOMATIZOVANÉ ZPRACOVÁNÍ MKP VÝSLEDKŮ

V následujících podkapitolách budou odvozeny potřebné soustavy rovnic pro stanovení elasto-plastické odezvy konstrukce z MKP řešení při proporcionálním namáhání a bude popsána práce s výslednými programy.

### 5.1 Sestavení soustav rovnic pro bilineární materiál

V kapitole 2.3 již byly sestaveny rovnice pro určení horního a dolního odhadu napětí a deformace v kořeni vrubu. Nyní tyto rovnice budou zjednodušeny tak, aby z pěti neznámých vzniklo pomocí různých substitucí, co možná nejméně proměnných, a to z toho důvodu, že rovnice jsou nelineární a nelze je řešit analyticky.

*Neuber:*

$$\varepsilon_1^N = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^N + \sigma_3^N) - \frac{\sigma_{eq}^N - \sigma_0}{2H_p} \left( \frac{\sigma_2^N + \sigma_3^N}{\sigma_{eq}^N} \right), \quad (5.1.1)$$

$$\varepsilon_2^N = \frac{1}{E}(\sigma_2^N - \nu\sigma_3^N) + \frac{\sigma_{eq}^N - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_2^N - \frac{1}{2}\sigma_3^N}{\sigma_{eq}^N} \right), \quad (5.1.2)$$

$$\varepsilon_3^N = \frac{1}{E}(\sigma_3^N - \nu\sigma_2^N) + \frac{\sigma_{eq}^N - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_3^N - \frac{1}{2}\sigma_2^N}{\sigma_{eq}^N} \right), \quad (5.1.3)$$

$$\sigma_{eq}^N = \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}, \quad (5.1.4)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^N \varepsilon_2^N}{\sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N}, \quad (5.1.5)$$

$$\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e = \sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N, \quad (5.1.6)$$

$$H_p = \frac{E E_T}{E - E_T}. \quad (5.1.7)$$



Z rovnic (5.1.5) a (5.1.6) lze vyjádřit (5.1.8) a (5.1.9):

$$\varepsilon_2^N = \frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^N}, \quad (5.1.8)$$

$$\varepsilon_3^N = \frac{\sigma_3^e \varepsilon_3^e}{\sigma_3^N}, \quad (5.1.9)$$

a dosadíme do rovnic (5.1.1), (5.1.2) a (5.1.3). Tím dostáváme soustavu (5.1.10), (5.1.11) a (5.1.12) rovnic o třech neznámých  $\varepsilon_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N$ .

$$\varepsilon_1^N + \frac{\nu}{E}(\sigma_2^N + \sigma_3^N) + \frac{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} - \sigma_0}{2H_p} \left( \frac{\sigma_2^N + \sigma_3^N}{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} \right) = 0, \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^N} - \frac{1}{E}(\sigma_2^N - \nu \sigma_3^N) - \frac{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_2^N - \frac{1}{2} \sigma_3^N}{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} \right) = 0, \quad (5.1.11)$$

$$\frac{\sigma_3^e \varepsilon_3^e}{\sigma_3^N} - \frac{1}{E}(\sigma_3^N - \nu \sigma_2^N) - \frac{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_3^N - \frac{1}{2} \sigma_2^N}{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} \right) = 0. \quad (5.1.12)$$

Glinka:

$$\frac{1}{2}(\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e) = \frac{1}{3E}(1 + \nu)(\sigma_{eq}^E) + \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) + \frac{(\sigma_{eq}^E)^2 - \sigma_0^2}{2H_p}, \quad (5.1.13)$$

$$\varepsilon_1^E = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) - \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{2H_p} \left( \frac{\sigma_2^E + \sigma_3^E}{\sigma_{eq}^E} \right), \quad (5.1.14)$$

$$\varepsilon_2^E = \frac{1}{E}(\sigma_2^E - \nu\sigma_3^E) + \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_2^E - \frac{1}{2}\sigma_3^E}{\sigma_{eq}^E} \right), \quad (5.1.15)$$

$$\varepsilon_3^E = \frac{1}{E}(\sigma_3^E - \nu\sigma_2^E) + \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_3^E - \frac{1}{2}\sigma_2^E}{\sigma_{eq}^E} \right), \quad (5.1.16)$$

$$\sigma_{eq}^E = \sqrt{(\sigma_2^E)^2 - \sigma_2^E \sigma_3^E + (\sigma_3^E)^2}, \quad (5.1.17)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E}{\sigma_2^E \varepsilon_2^E + \sigma_3^E \varepsilon_3^E}, \quad (5.1.18)$$

$$H_p = \frac{EE_T}{E - E_T}. \quad (5.1.19)$$

Z rovnice (5.1.18) lze vyjádřit (5.1.20):

$$\varepsilon_3^E = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E (1 - A)}{A \sigma_3^E}, \quad (5.1.20)$$

kde A je

$$A = \frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e}, \quad (5.1.21)$$

a dosadíme do rovnic (5.1.13), (5.1.14) a (5.1.15). Tím dostáváme soustavu rovnic (5.1.10), (5.1.23), (5.1.24) a (5.1.25) o čtyřech neznámých  $\varepsilon_1^E$ ,  $\varepsilon_2^E$ ,  $\sigma_2^E$ ,  $\sigma_3^E$ .

$$\frac{1}{2}(\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e) - \frac{1}{3E}(1 + \nu)(\sigma_{eq}^E) - \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) - \frac{(\sigma_{eq}^E)^2 - \sigma_0^2}{2H_p} = 0, \quad (5.1.22)$$

$$\varepsilon_1^E - -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) + \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{2H_p} \left( \frac{\sigma_2^E + \sigma_3^E}{\sigma_{eq}^E} \right) = 0, \quad (5.1.23)$$

$$\varepsilon_2^E - \frac{1}{E}(\sigma_2^E - \nu\sigma_3^E) - \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_2^E - \frac{1}{2}\sigma_3^E}{\sigma_{eq}^E} \right) = 0, \quad (5.1.24)$$

$$\frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E (1 - A)}{A\sigma_3^E} - \frac{1}{E}(\sigma_3^E - \nu\sigma_2^E) + \frac{\sigma_{eq}^E - \sigma_0}{H_p} \left( \frac{\sigma_3^E - \frac{1}{2}\sigma_2^E}{\sigma_{eq}^E} \right) = 0. \quad (5.1.25)$$

## 5.2 Sestavení soustav rovnic pro nelineární materiál – Armstrong-Frederickův model

V kapitole 2.3 již byly sestaveny rovnice pro určení horního a dolního odhadu napětí a deformace v kořeni vrubu pro libovolný materiál (2.3.5) až (2.3.17). V článku [8] byly podrobně rozebrány pouze elasto-plastické korekce pro bilineární materiál a nyní tyto odhady budou nově aplikovány také na nelineární Armstrong-Frederickův model, který je implementován i v programu Ansys. Tudíž lze provádět porovnání s elasto-plastického MKP řešení a s provedeným dolním a horním odhadem. Konstituční rovnice pro Armstrong-Frederickův model je vyjádřena takto:

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma \epsilon_{eq}^p \frac{E}{C}} \right), \quad (5.2.1)$$

kde  $\gamma$  [-] a  $C$  [MPa] jsou materiálové parametry.

Pro ekvivalentní elasto-plastickou deformaci pak platí:

$$\epsilon_{eq}^p = f(\sigma_{eq}) = \ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{eq} - \sigma_0) \right], \quad (5.2.2)$$

Dosazením (5.2.2) do (2.3.5) až (2.3.10) získáme soustavu rovnic pro horní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu:

$$\epsilon_1^N = -\frac{\nu}{E} (\sigma_2^N + \sigma_3^N) + \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{eq}^N - \sigma_0) \right]}{2\gamma \sigma_{eq}^N} (\sigma_2^N + \sigma_3^N), \quad (5.2.3)$$

$$\epsilon_2^N = \frac{1}{E} (\sigma_2^N - \nu \sigma_3^N) - \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{eq}^N - \sigma_0) \right]}{\gamma \sigma_{eq}^N} \left( \sigma_2^N - \frac{1}{2} \sigma_3^N \right), \quad (5.2.4)$$

$$\epsilon_3^N = \frac{1}{E} (\sigma_3^N - \nu \sigma_2^N) - \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{eq}^N - \sigma_0) \right]}{\gamma \sigma_{eq}^N} \left( \sigma_3^N - \frac{1}{2} \sigma_2^N \right), \quad (5.2.5)$$

$$\sigma_{eq}^N = \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} \quad (5.2.6)$$

$$\frac{\sigma_2^e \epsilon_2^e}{\sigma_2^e \epsilon_2^e + \sigma_3^e \epsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^N \epsilon_2^N}{\sigma_2^N \epsilon_2^N + \sigma_3^N \epsilon_3^N}, \quad (5.2.7)$$

$$\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e = \sigma_2^N \varepsilon_2^N + \sigma_3^N \varepsilon_3^N, \quad (5.2.8)$$

Z rovnic (5.2.7) a (5.2.8) lze vyjádřit (5.2.9), (5.2.10):

$$\varepsilon_2^N = \frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^N}, \quad (5.2.9)$$

$$\varepsilon_3^N = \frac{\sigma_3^e \varepsilon_3^e}{\sigma_3^N}, \quad (5.2.10)$$

a dosadíme do rovnic (5.1.2), (5.1.3) a (5.1.4). Tím dostáváme soustavu (5.1.10), (5.1.11), (5.1.12) rovnic o třech neznámých  $\varepsilon_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N$ .

$$\varepsilon_1^N + \frac{\nu}{E}(\sigma_2^N + \sigma_3^N) - \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} \left( \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} - \sigma_0 \right) \right]}{2\gamma \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} (\sigma_2^N + \sigma_3^N) = 0, \quad (5.2.11)$$

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^N} - \frac{1}{E}(\sigma_2^N - \nu \sigma_3^N) + \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} \left( \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} - \sigma_0 \right) \right]}{\gamma \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} \left( \sigma_2^N - \frac{1}{2} \sigma_3^N \right) = 0, \quad (5.2.12)$$

$$\frac{\sigma_3^e \varepsilon_3^e}{\sigma_3^N} - \frac{1}{E}(\sigma_3^N - \nu \sigma_2^N) + \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} \left( \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2} - \sigma_0 \right) \right]}{\gamma \sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} \left( \sigma_3^N - \frac{1}{2} \sigma_2^N \right) = 0. \quad (5.2.13)$$

Dosažením (5.2.2) do (2.3.11), (2.3.17) získáme soustavu rovnic pro dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu:

$$\frac{1}{2}(\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e) = \frac{1}{3E}(1 + \nu)(\sigma_{eq}^E) + \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) + \int_0^{\varepsilon_{eq}^E} \sigma_{eq}^E d\varepsilon_{eq}^E, \quad (5.2.14)$$

$$\varepsilon_1^E = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E) + \frac{\ln\left[1 - \frac{\gamma}{C}(\sigma_{eq}^E - \sigma_0)\right]}{2\gamma\sigma_{eq}^E}(\sigma_2^E + \sigma_3^E), \quad (5.2.15)$$

$$\varepsilon_2^E = \frac{1}{E}(\sigma_2^E - \nu\sigma_3^E) - \frac{\ln\left[1 - \frac{\gamma}{C}(\sigma_{eq}^E - \sigma_0)\right]}{\gamma\sigma_{eq}^E}\left(\sigma_2^E - \frac{1}{2}\sigma_3^E\right), \quad (5.2.16)$$

$$\varepsilon_3^E = \frac{1}{E}(\sigma_3^E - \nu\sigma_2^E) - \frac{\ln\left[1 - \frac{\gamma}{C}(\sigma_{eq}^E - \sigma_0)\right]}{\gamma\sigma_{eq}^E}\left(\sigma_3^E - \frac{1}{2}\sigma_2^E\right), \quad (5.2.17)$$

$$\sigma_{eq}^E = \sqrt{(\sigma_2^E)^2 - \sigma_2^E \sigma_3^E + (\sigma_3^E)^2}, \quad (5.2.18)$$

$$\frac{\sigma_{22}^e \varepsilon_{22}^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E}{\sigma_2^E \varepsilon_2^E + \sigma_3^E \varepsilon_3^E}, \quad (5.2.19)$$

$$\varepsilon_{eq}^E = f(\sigma_{eq}^E). \quad (5.2.20)$$

Z rovnice (5.2.19) lze vyjádřit (5.2.21):

$$\varepsilon_3^E = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E (1 - A)}{A \sigma_3^E}, \quad (5.2.21)$$

kde A je

$$A = \frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e}, \quad (5.2.22)$$

Ještě je potřeba vyjádřit integrál z rovnice (5.2.14):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}}} \left[ \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}}} \right) \right] d\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}} \\
&= \left( \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \right) \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}} - \frac{C}{\gamma} \int_0^{\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}}} e^{-\gamma \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}}} d\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}} = \\
&= \left( \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \right) \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}} + \frac{C}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{p E}}} - \frac{1}{\gamma} \right] = \\
&= \left( \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \right) \frac{-\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma} \\
&+ \frac{C}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma \frac{-\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma}} - \frac{1}{\gamma} \right] = \tag{5.2.23} \\
&= \left( \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \right) \frac{-\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma} \\
&+ \frac{C}{\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right] - \frac{1}{\gamma} \right] = \\
&= \left( \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \right) \frac{-\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma} - \frac{\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0}{\gamma}
\end{aligned}$$

a dosadíme do rovnic (5.2.14), (5.2.15) a (5.2.16). Tím dostáváme soustavu rovnic (5.2.24), (5.2.25), (5.2.26) a (5.2.27) o čtyřech neznámých  $\varepsilon_1^{\text{E}}$ ,  $\varepsilon_2^{\text{E}}$ ,  $\sigma_2^{\text{E}}$ ,  $\sigma_3^{\text{E}}$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\sigma_2^{\text{E}} \varepsilon_2^{\text{E}} + \sigma_3^{\text{E}} \varepsilon_3^{\text{E}}) - \frac{1}{3E} (1 + \nu) (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}}) - \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_2^{\text{E}} + \sigma_3^{\text{E}}) \\
& - \left( \left( \sigma_0 + \frac{C}{\gamma} \right) \frac{-\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma} - \frac{\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0}{\gamma} \right), \tag{5.2.24}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1^{\text{E}} - -\frac{\nu}{E} (\sigma_2^{\text{E}} + \sigma_3^{\text{E}}) - \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{2\gamma \sigma_{\text{eq}}^{\text{E}}} (\sigma_2^{\text{E}} + \sigma_3^{\text{E}}), \tag{5.2.25}$$

$$\varepsilon_2^{\text{E}} - \frac{1}{E} (\sigma_2^{\text{E}} - \nu \sigma_3^{\text{E}}) + \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma \sigma_{\text{eq}}^{\text{E}}} \left( \sigma_2^{\text{E}} - \frac{1}{2} \sigma_3^{\text{E}} \right), \tag{5.2.26}$$

$$\frac{\sigma_2^{\text{E}} \varepsilon_2^{\text{E}} (1 - A)}{A \sigma_3^{\text{E}}} - \frac{1}{E} (\sigma_3^{\text{E}} - \nu \sigma_2^{\text{E}}) + \frac{\ln \left[ 1 - \frac{\gamma}{C} (\sigma_{\text{eq}}^{\text{E}} - \sigma_0) \right]}{\gamma \sigma_{\text{eq}}^{\text{E}}} \left( \sigma_3^{\text{E}} - \frac{1}{2} \sigma_2^{\text{E}} \right). \tag{5.2.27}$$

### 5.3 Popis metody řešení soustav rovnic pro odhady napětí a deformace v kořeni vrubu

V předchozích podkapitolách 5.1 a 5.2 byly odvozeny soustavy rovnic pro dolní i horní odhad napětí. Jelikož jsou všechny soustavy nelineární a nedají se spočítat analyticky, tak pro jejich výpočet byla použita Newtonova iterační metoda pro případ  $n$  rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Řešení soustav rovnic Newtonovou metodou lze zapsat ve tvaru:

$${}^{k+1}x = {}^kx - [J({}^kx)]^{-1}f({}^kx), \quad (5.3.2)$$

kde

$${}^kx = \begin{Bmatrix} {}^kx_1 \\ {}^kx_2 \\ \vdots \\ {}^kx_n \end{Bmatrix}, f(x) = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{Bmatrix} \quad (5.3.3)$$

a  $J(x)$  je Jacobiova matice

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Bmatrix} \quad (5.3.4)$$



Pro názornost bude uvedeno vyjádření Jacobiovy matice (5.3.4) pro soustavu rovnic (5.1.10), (5.1.11) a (5.1.12).

$$J(\epsilon_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_1^N} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2^N} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3^N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \epsilon_1^N} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2^N} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3^N} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \epsilon_1^N} & \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_2^N} & \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_3^N} \end{vmatrix}, \quad (5.3.5)$$

kde

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_1^N} = 1,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2^N} = \frac{\nu}{E} + \frac{(K\sigma_2^N + \sigma_{eq}^N + K\sigma_3^N - \sigma_0)2H_p\sigma_{eq}^N - (\sigma_{eq}^N - \sigma_0)(\sigma_2^N + \sigma_3^N)2H_pK}{4H_p^2\sigma_{eq}^{N^2}} \quad (5.3.6)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3^N} = \frac{\nu}{E} + \frac{(L\sigma_3^N + \sigma_{eq}^N + L\sigma_2^N - \sigma_0)2H_p\sigma_{eq}^N - (\sigma_{eq}^N - \sigma_0)(\sigma_2^N + \sigma_3^N)2H_pL}{4H_p^2\sigma_{eq}^{N^2}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \epsilon_1^N} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2^N} = \frac{\sigma_2^e \epsilon_2^e}{\sigma_2^{N^2}} - \frac{1}{E} - \frac{(K\sigma_2^N + \sigma_{eq}^N - \frac{1}{2}K\sigma_3^N - \sigma_0)H_p\sigma_{eq}^N - (\sigma_{eq}^N - \sigma_0)(\sigma_2^N - \frac{1}{2}\sigma_3^N)H_pK}{H_p^2\sigma_{eq}^{N^2}} \quad (5.3.7)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3^N} = \frac{\nu}{E} - \frac{(L\sigma_2^N - \frac{1}{2}\sigma_{eq}^N - \frac{1}{2}L\sigma_3^N + \frac{1}{2}\sigma_0)H_p\sigma_{eq}^N - (\sigma_{eq}^N - \sigma_0)(\sigma_2^N - \frac{1}{2}\sigma_3^N)H_pL}{H_p^2\sigma_{eq}^{N^2}},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \epsilon_1^N} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \sigma_2^N} = -\frac{\nu}{E} - \frac{(K\sigma_3^N - \frac{1}{2}\sigma_{eq}^N - \frac{1}{2}K\sigma_2^N + \frac{1}{2}\sigma_0)H_p\sigma_{eq}^N - (\sigma_{eq}^N - \sigma_0)(\sigma_3^N - \frac{1}{2}\sigma_2^N)H_pK}{H_p^2\sigma_{eq}^{N^2}} \quad (5.3.8)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \sigma_3^N} = \frac{\sigma_3^e \epsilon_3^e}{\sigma_3^{N^2}} - \frac{1}{E} - \frac{(L\sigma_3^N + \sigma_{eq}^N - \frac{1}{2}L\sigma_2^N - \sigma_0)H_p\sigma_{eq}^N - (\sigma_{eq}^N - \sigma_0)(\sigma_3^N - \frac{1}{2}\sigma_2^N)H_pL}{H_p^2\sigma_{eq}^{N^2}},$$

kde

$$K = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} (2\sigma_2^N - \sigma_3^N)$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\sigma_2^N)^2 - \sigma_2^N \sigma_3^N + (\sigma_3^N)^2}} (2\sigma_3^N - \sigma_2^N) \quad (5.3.9)$$

Analytické vyjádření Jacobiových matic nalezneme v příloze na CD-ROM textovém souboru nazvaném Jacobiovy\_matice.

#### 5.4 Popis skriptu umožňujícího automatizované zpracování MKP výsledku danými metodami

Na základě předchozích úvah byl nejprve odladěn algoritmus v programu Matlab (viz tištěná příloha). M-file pracuje jak s bilineárním materiálem, tak i s nelineárním Armstrong-Frederickovým modelem a přepočítává elastické MKP řešení na elasto-plastické řešení, a to jak Glinkovou metodou, tak i Neuberovou metodou.

Následně byly algoritmy přeprogramovány do makra Vypocty v jazyce APDL, které je také přiloženo na CD-ROM. Při porovnání obou programovacích jazyků APDL a Matlab je zřejmé, že Matlab umožňuje mnohem efektivnější a kratší zápis jednotlivých výpočtů.

Makro Vypocty automaticky zpracovává data z programu Model. Po spuštění Vypoctu se rozběhne výpočet, po jehož dokončení se na obrazovce vyobrazí průběh napětí v blízkosti kořene vrubu v posledním zátěžném kroku.

Pokud uživatel počítal s elastickým modelem, tak si může zvolit, jestli chce elastické řešení přepočítat na elasto-plastické pomocí bilineárního či nelineárního Armstrong-Frederickova modelu nebo zvolit možnost obou přepočtů najednou. Po výpočtu se ve složce, kde jsou uloženy makra, vygenerují nové textové soubory s výsledky. Matice s názvem Glinka reprezentuje dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu a matice Neuber horní odhad. Jednotlivé řádky reprezentují pořadí zátěžných kroků. První dva sloupce náleží napětí a poslední tři deformacím.

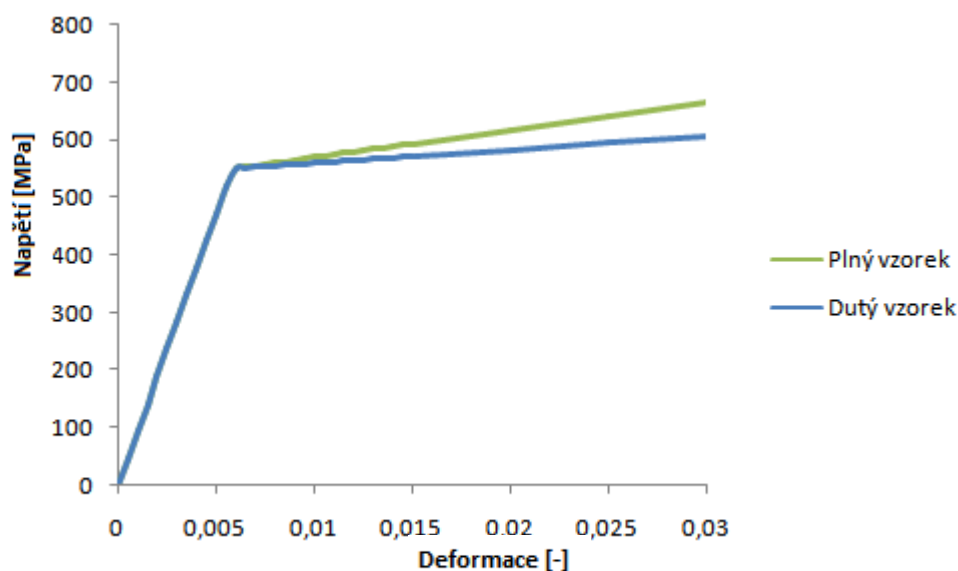
U Armstrong-Frederickova přepočtu může dojít k tomu, že se ve výsledcích objeví v maticích nulové řádky. To je zapříčiněno tím, že se v rovnici (5.2.2) objevuje logaritmus, který má omezený definiční obor na  $\mathbb{R}^+/\{0\}$ . Zadané vstupní hodnoty zatížení a materiálové parametry tudíž neumožňují výpočet dle Armstrong-Frederickova modelu (je překročena limitní plocha modelu).

Jestliže počítáme rovnou s elasto-plastickým materiálem, tak se opět vygeneruje do složky textový soubor s výsledky napětí a deformace.

V příloze na CD-ROM najdeme také předpřipravený excelovský soubor ZPRACOVANI\_VYSLEDNYCH\_DAT, do kterého je možno výsledná data zkopírovat a vykreslit tak požadované průběhy napětí a deformace.

## 6. PŘÍKLADY STANOVENÍ ELASTO-PLASTICKÉHO ŘEŠENÍ Z ELASTICKÉHO MKP VÝPOČTU

Následující kapitolu lze rozdělit do čtyř základních částí. První z nich se zabývá verifikací výpočtů dostupných z literatury [8] a získaných dat z vytvořeného makra Vypocty (viz příloha na CD). Posuzují se jak plné (viz Obr. 7), tak i duté (Obr. 8) válcové vzorky při proporcionálním zatěžování. Materiál je vždy bilineární a jeho napětí-ově-deformační křivky jsou na Obr. 22.



Obr. 22 Napětí-ově – deformační křivka materiálu pro bilineární materiál

Matematický popis napětí-ově-deformační křivky plného vzorku 2a:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & \text{pro } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_T}, & \text{pro } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (6.1.1)$$

$$E = 94\,400 \text{ MPa}; \nu = 0,3; E_T = 0,05E; \sigma_0 = 550 \text{ MPa};$$

Matematický popis napětově–deformační křivky dutého vzorku 2b:

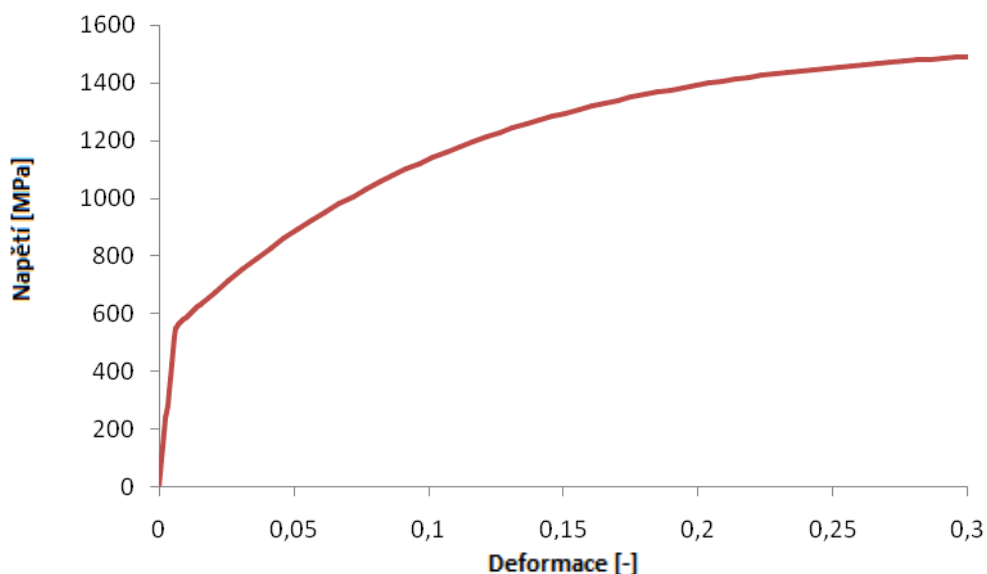
$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & \text{pro } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_T}, & \text{pro } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (6.1.2)$$

$$E = 94\,400 \text{ MPa}; \nu = 0,3; E_T = 0,0244E; \sigma_0 = 550 \text{ MPa};$$

Druhá část je věnována nelineárnímu Armstrong-Frederickovu modelu, který je zatížen stejným typem zatížení jako v předchozí části kapitoly. Zde není možné porovnávat s dostupnými daty z literatury, jelikož pro nelineární model byla nově odvozena soustava rovnic (viz kapitola 5.2) a z této soustavy rovnic byly vytvořeny algoritmy umožňující tento přepočet. Velikost zatížení a materiálové parametry jsou voleny tak, aby nebyla překročena limitní plocha. Elastické materiálové konstanty zůstávají stejné:

$$E = 94\,400 \text{ MPa}; \nu = 0,3; \sigma_0 = 550 \text{ MPa}; C = 10\,000 \text{ MPa}; \gamma = 10 \quad (6.1.3)$$

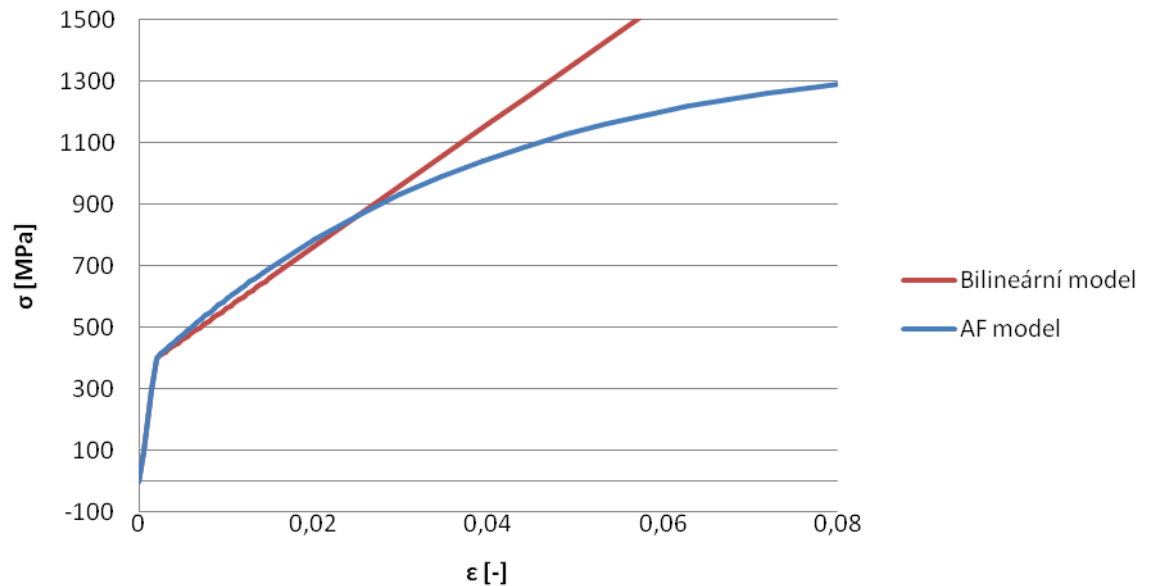
Napětově–deformační křivka odpovídající uvedeným parametrům je:



Obr. 23 Napětově–deformační křivka Armstrong-Frederickova modelu

Třetí část si klade za cíl ověření výpočtu s volbou jiné geometrie (vzorek číslo 3 na Obr. 9) a materiálových parametrů. Jelikož výpočet bude prováděn pro oba materiálové modely najednou, budou parametry materiálů voleny tak, aby rozdíly mezi napětově-deformační křivkou byly v požadované plastické oblasti co nejmenší:

### Porovnání materiálových modelů



Obr. 24 Napětově – deformační křivka obou materiálů

Materiálové parametry bilineární napětově–deformační křivky jsou:

$$E = 200\,000 \text{ MPa}; \nu = 0,3; E_T = 20\,000; \sigma_0 = 400 \text{ MPa}; \quad (6.1.4)$$

Materiálové parametry Armstrong-Frederickovy napětově–deformační křivky jsou:

$$E = 200\,000 \text{ MPa}; \nu = 0,3; \sigma_0 = 400 \text{ MPa}; C = 30\,000 \text{ MPa}; \gamma = 30 \quad (6.1.5)$$

Nakonec budou všechny výsledky komentovány v kapitole 6.4.

## 6.1 Verifikace modelů s bilineárním materiálem

### 6.1.1 Kombinace tahu a krutu pro bilineární materiál

V [8] a [12] nalezneme vyřešený příklad pro plný válcový vzorek (viz Obr. 7), který je zatížen současným působením tahu a krutu. Přepočet byl proveden pro bilineární materiál dle vztahů (6.1.1) a pro nominální napětí platí:

$$\sigma_{nF} = \frac{F}{\pi(R-t)^2}, \tau_n = \frac{2T}{\pi(R-t)^3}, \frac{\tau_n}{\sigma_{nF}} = 2,5 = \text{konst.} \quad (6.1.6)$$

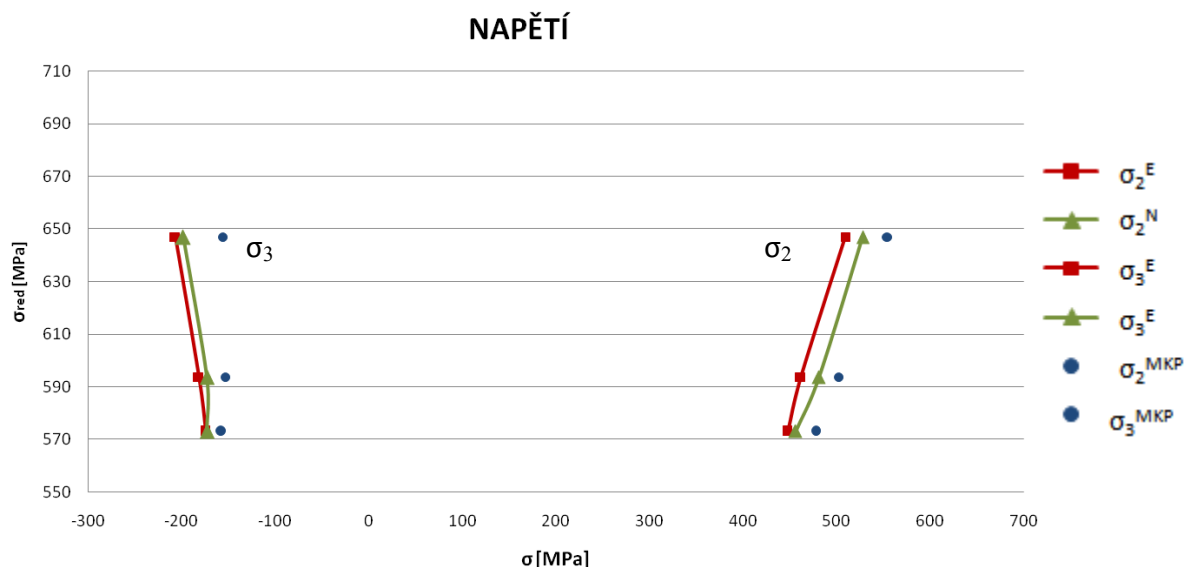
Deformační křivka odpovídající zvolenému bilineárnímu materiálu byla již dříve uvedena na Obr. 22.

V tabulce 3 jsou uvedeny konkrétní hodnoty krouticího momentu a síly, které byly aplikovány na daném vzorku. Je zachován konstantní poměr napětí ze vztahu (6.1.6).

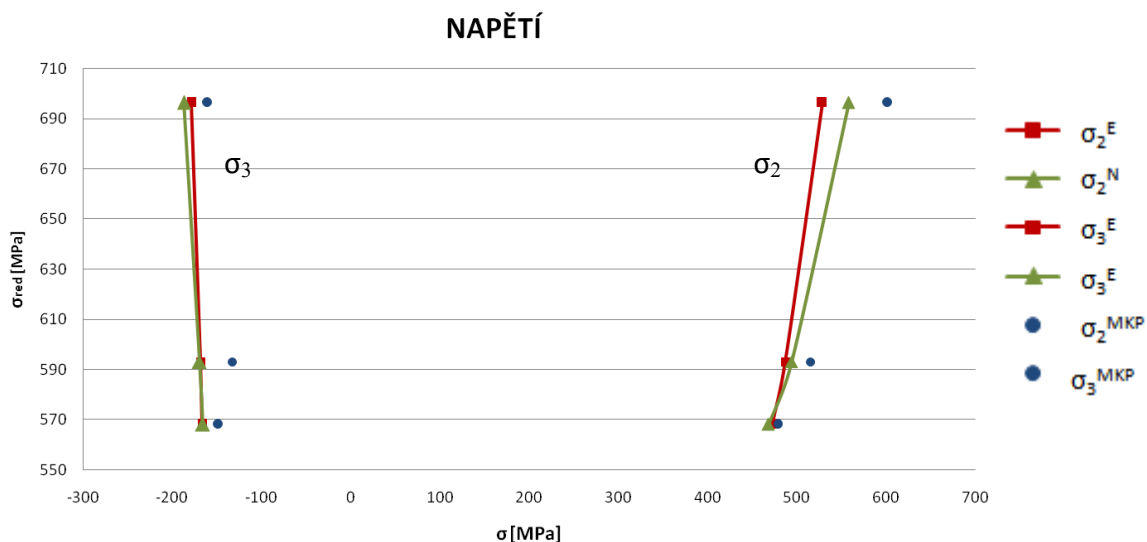
i	$T_i$ [kNm]	$F_i$ [N]
1	62,884	838448
2	81,873	1091643
3	123,484	1646458

Tabulka 3 Velikost krouticího momentu a síly

Výsledný průběh napětí na Obr. 25 znázorňuje data přejatá z článku [8] a na Obr. 26 jsou data získaná pomocí vytvořeného programu Vypocty, který je v příloze na CD.



Obr. 25 Průběh napětí na vzorku 2a zatíženém současným tahem a krutem



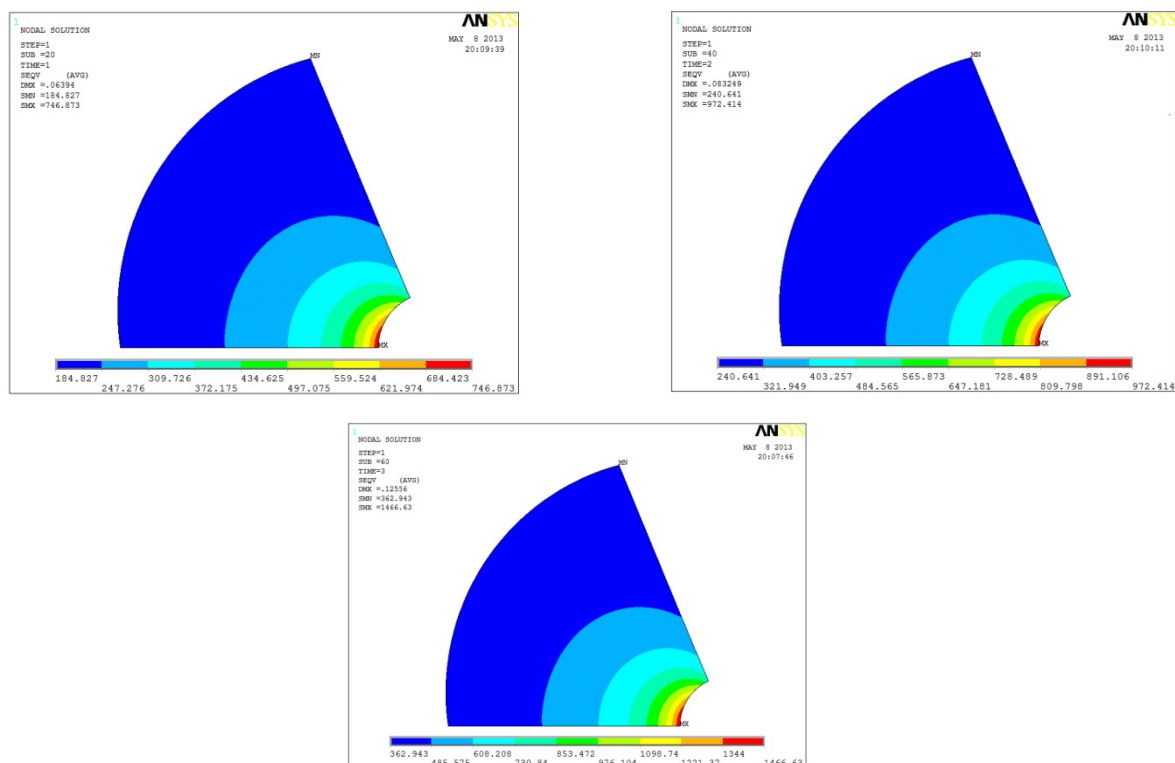
Obr. 26 Průběh napětí na vzorku 2a zatíženém současným tahem a krutem

Index MKP označuje vypočítané hodnoty pro elasto-plastický materiál (3.4.2). Na svislou osu je vynášena hodnota redukovaného napětí dle HMM hypotézy:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_2^{MKP^2} + \sigma_3^{MKP^2} - \sigma_3^{MKP} \sigma_2^{MKP}}, \quad (6.1.7)$$

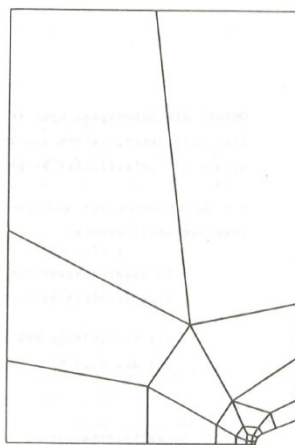


Na Obr. 27 jsou vykresleny průběhy redukovaného napětí podle hypotézy HMM pro elastický výpočet ve všech třech zátěžných krocích.



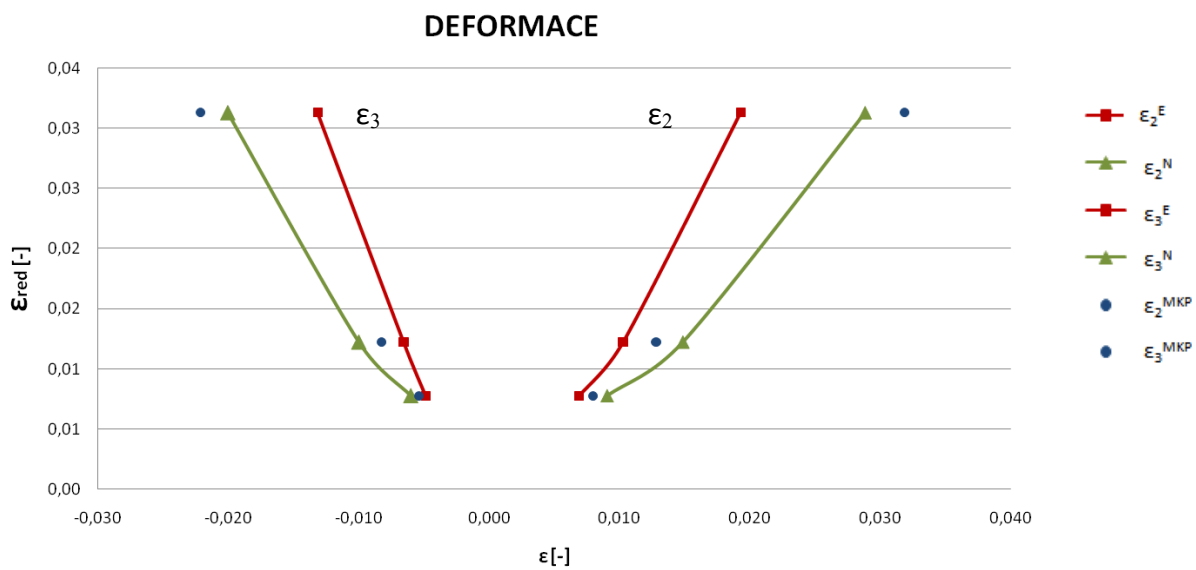
Obr. 27 Průběhy redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet

Průběhy napětí na Obr. 25 a Obr. 26 jsou si velmi podobné, liší se jen ve výsledných hodnotách napětí. Tyto odchylky jsou způsobeny použitou sítí. K původnímu výpočtu byla použita velmi řídká síť (viz Obr. 28), jelikož byl realizován již ve druhé polovině osmdesátých let, kdy nebyla k dispozici tak vyspělá technika jako nyní, viz [11]. Tuto domněnku dokazuje i Obr. 27, na kterém vidíme, že výsledné hodnoty napětí poměrně rychle klesají se zvyšující se vzdáleností od kořene vrubu.

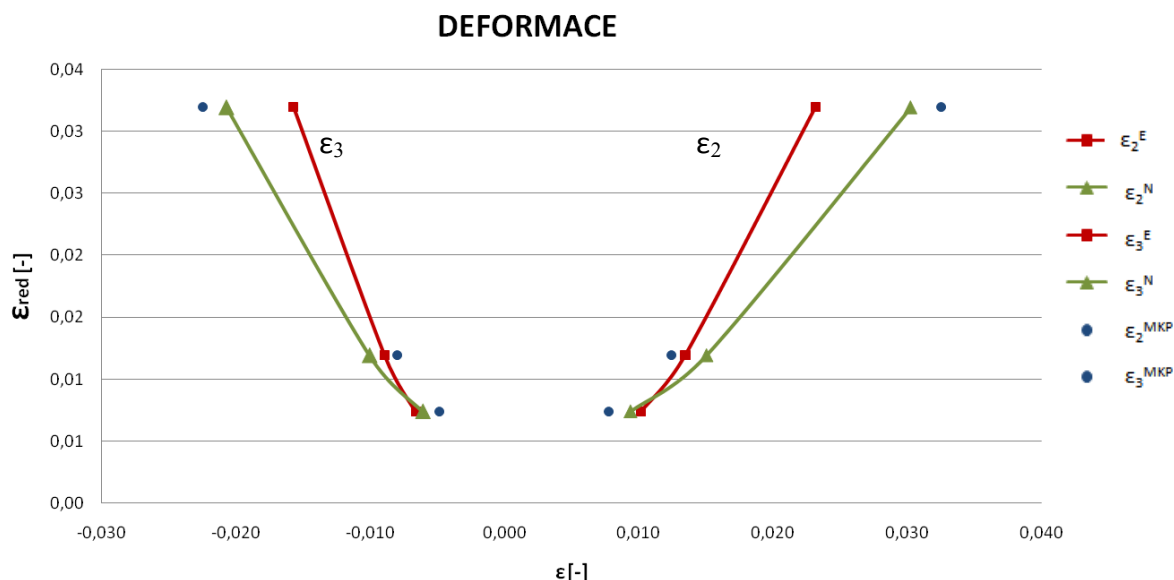


Obr. 28 Síť [11]

Průběhy deformace opět vyšly pouze s malými odlišnostmi, jak je vidět z Obr. 29 (řešení dostupné z literatury) a z Obr. 30. Výsledné hodnoty se liší jen nepatrně.



Obr. 29 Průběh deformace na vzorku 2a) zatíženém současným tahem a krutem



Obr. 30 Průběh deformace na vzorku 2a) zatíženém současným tahem a krutem

Index MKP označuje vypočítané hodnoty pro elasto-plastický materiál (3.4.2). Na vswisluu osu je vynášena intenzita deformace:

$$\varepsilon_{\text{red}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2} [(\varepsilon_1^{\text{MKP}} - \varepsilon_2^{\text{MKP}})^2 + (\varepsilon_2^{\text{MKP}} - \varepsilon_3^{\text{MKP}})^2 + (\varepsilon_1^{\text{MKP}} - \varepsilon_3^{\text{MKP}})^2]}, \quad (6.1.8)$$

kde u plného vzorku je  $\varepsilon_1^{\text{MKP}} = 0$  a u dutého  $\varepsilon_1^{\text{MKP}} \neq 0$ .

Pro elasto-plastické MKP řešení s bilineárním materiálem nelze předem určit, jestli jeho hodnota bude mezi horním a dolním odhadem nebo bude větší než horní odhad či menší než dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu.

### 6.1.2 Kombinace tahu a vnitřního přetlaku pro bilineární materiál

V článku [8] je dále zkoumán dutý válcový vzorek (viz Obr. 8), který je zatížen současným působením tahu a vnitřního přetlaku. Přepočet byl proveden pro bilineární materiál (6.1.2) a pro nominální napětí platí:

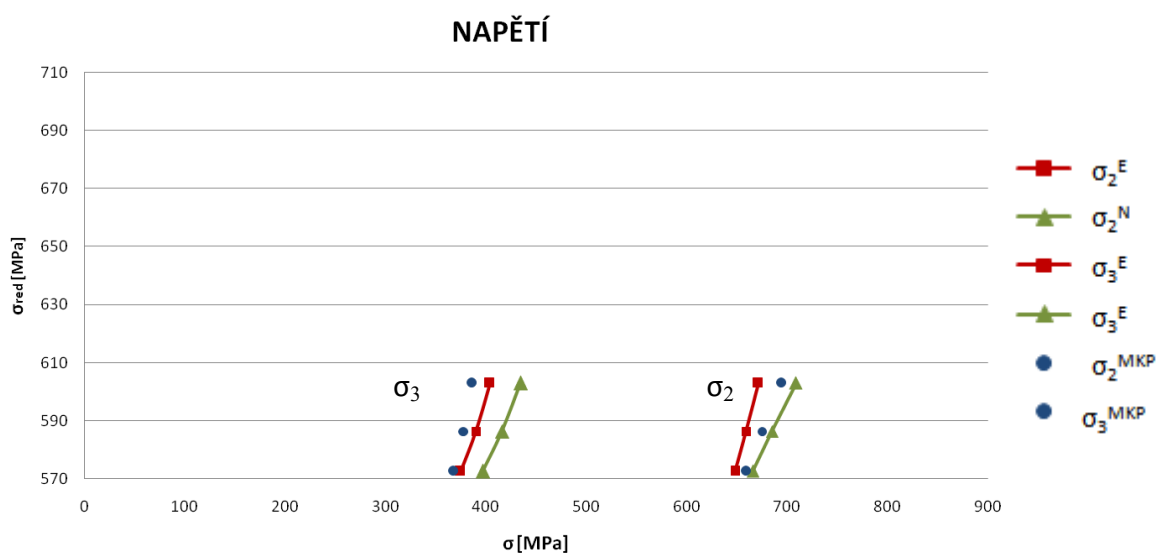
$$\sigma_{\text{nF}} = \frac{F}{\pi[(R_0 - t)^2 - R_i^2]}, \sigma_{\text{np}} = \frac{pR_i}{(R_0 - t - R_i)}, \frac{\sigma_{\text{np}}}{\sigma_{\text{nF}}} = 1,265 = \text{konst} \quad (6.1.9)$$

V tabulce 4 jsou uvedeny konkrétní hodnoty tahové síly a vnitřního přetlaku, které byly aplikovány na daném vzorku. Je zachován konstantní poměr napětí ze vztahu (6.1.9).

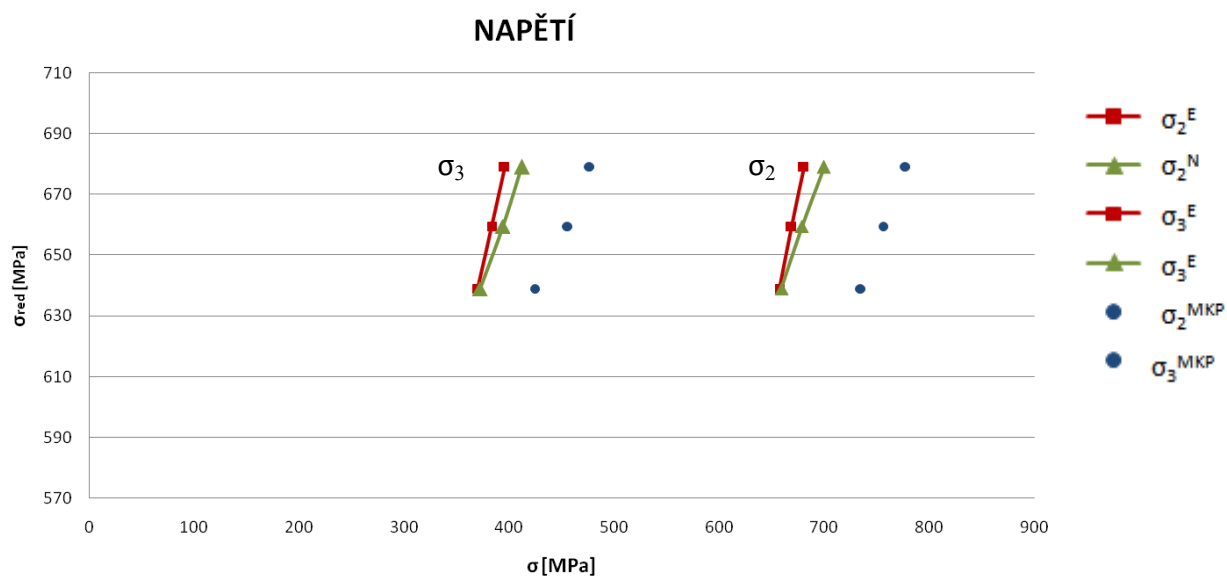
i	$p_i$ [MPa]	$F_i$ [N]
1	27,4	561541
2	33,6	686659
3	39,2	801351

Tabulka 4 Velikost tlaku a síly

Výsledný průběh napětí na Obr. 31 znázorňuje data přejatá ze článku [8] a na Obr. 32 jsou data získaná z vlastního výpočtu.

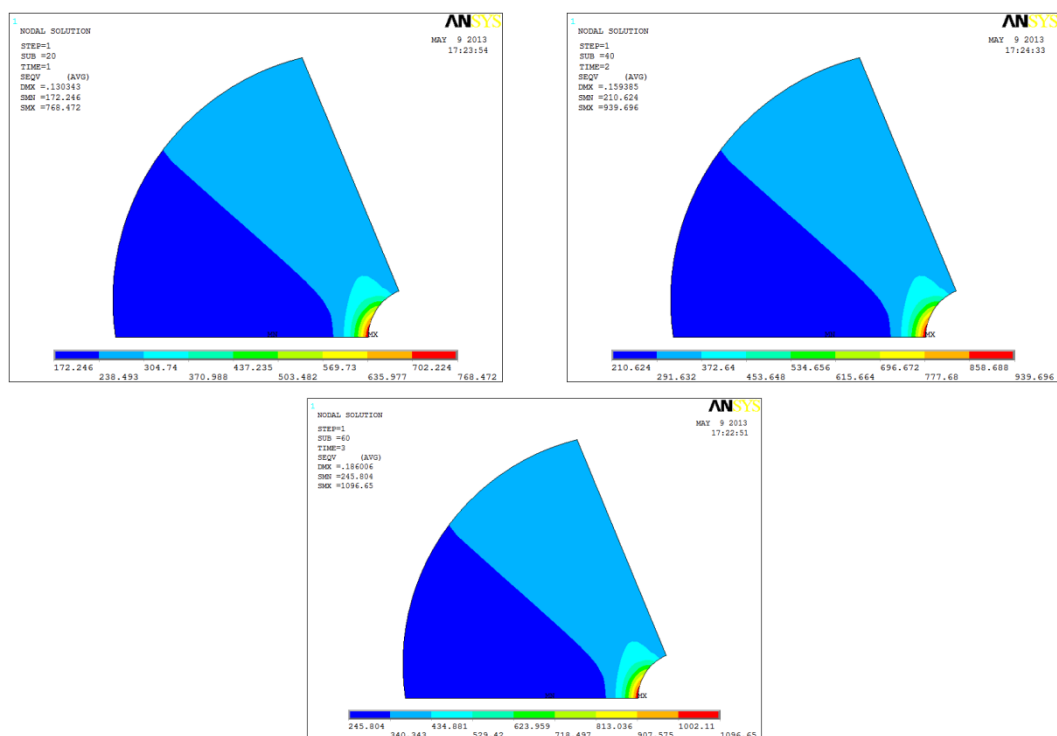


Obr. 31 Průběh napětí na vzorku 2b zatíženém současným tahem a vnitřním přetlakem převzato z [8]



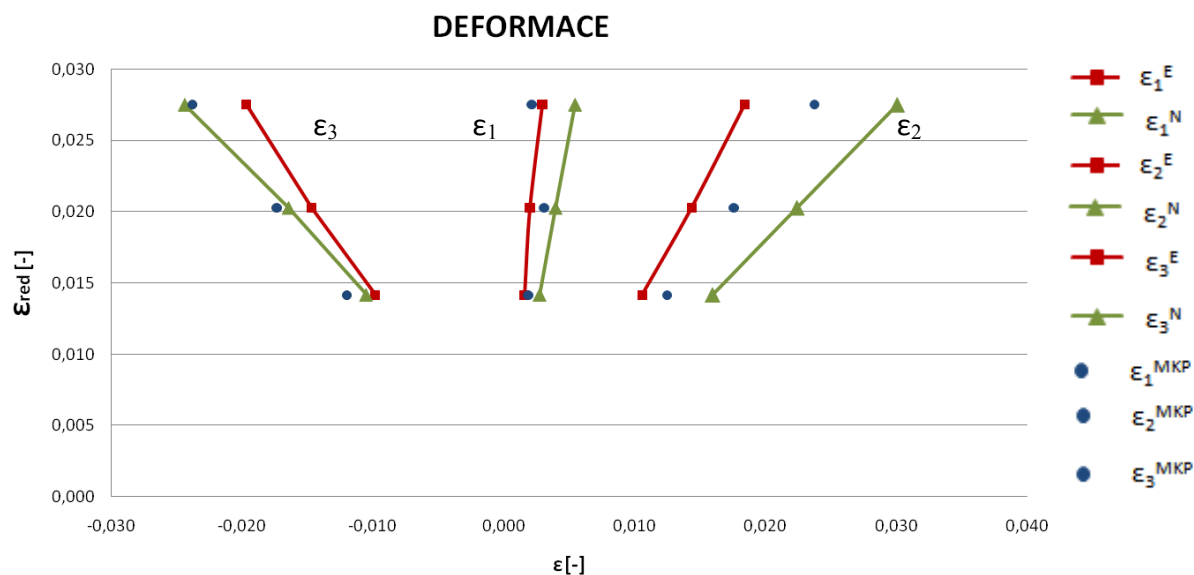
Obr. 32 Průběh napětí na vzorku 2b zatíženém současným tahem a vnitřním přetlakem

Na Obr. 33 jsou vykresleny průběhy redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet ve všech třech zátěžných krocích.

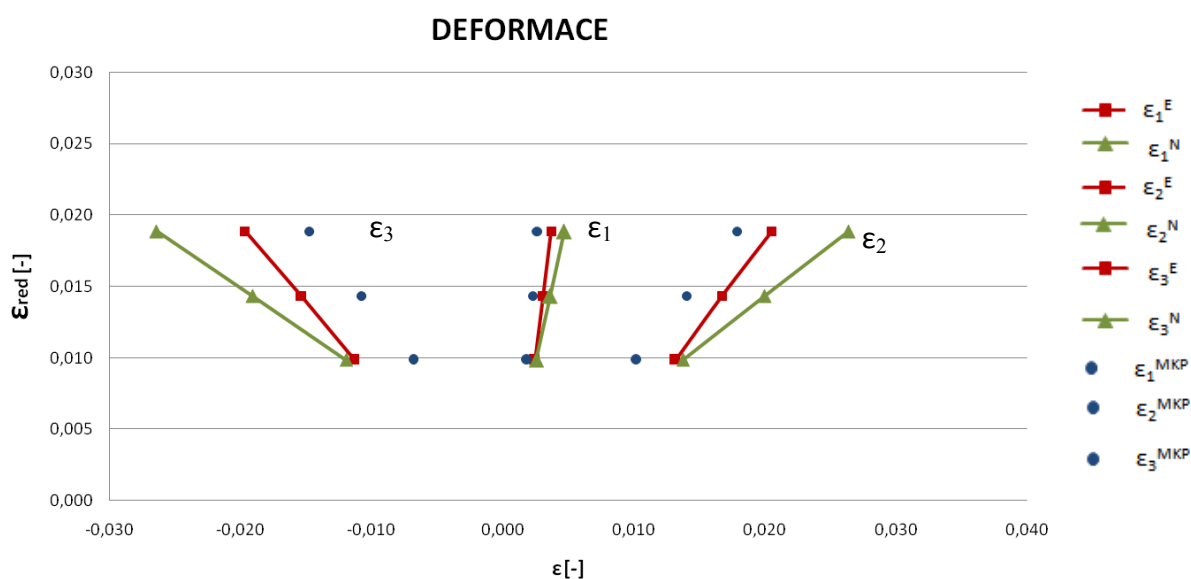


Obr. 33 Průběhy redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet

Průběhy napětí na Obr. 31 a Obr. 32 se liší především ve výsledných hodnotách. Tyto odchylky jsou nejspíše způsobeny použitou sítí. Autoři do článku nedali k dispozici obrázky sítě, ale vzhledem k tomu, že byl výpočet realizován před 25-ti lety, je pravděpodobné, že síť byla velmi řídká, jelikož tehdy nebyla výpočetní technika na potřebné úrovni.



Obr. 34 Průběh deformace na vzorku 2b zatíženém současným tahem a vnitřním přetlakem převzato z [8]



Obr. 35 Průběh deformace na vzorku 2b zatíženém současným tahem a vnitřním přetlakem

Průběhy deformace na Obr. 34 (výsledky z literatury [8]) a Obr. 35 (data z makra Vypocty) se liší především ve výsledných hodnotách. Tyto odchylky jsou opět spojeny se zvolenou sítí, stejně jako tomu bylo i u napětí, neboť napětí a deformace jsou ve výpočtech propojeny a nepočítají se zvlášť.

## 6.2 Verifikace Armstrong-Frederickova modelu

### 6.2.1 Kombinace tahu a krutu pro Armstrong-Frederickův model

Elasto-plastická korekce v kořeni vrubu je provedena při kombinaci zatížení tahu a krutu na vzorku 2a (viz Obr. 7) za použití Armstrong-Frederickova modelu (viz vztahy (6.1.3)) Napěťově-deformační křivka tohoto modelu je vykreslena na Obr. 23. Pro nominální napětí platí:

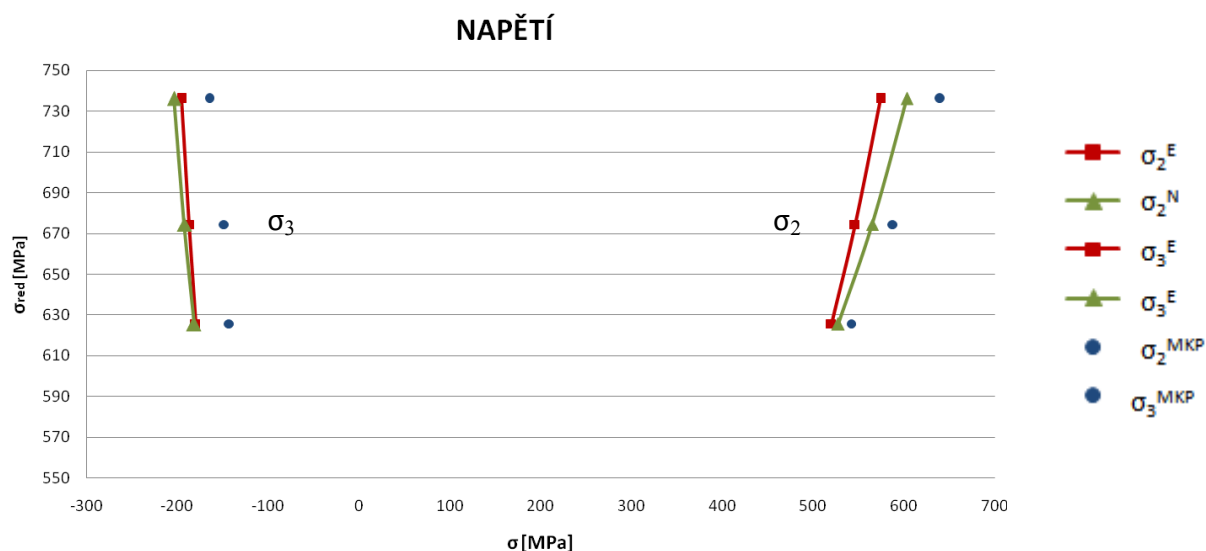
$$\sigma_{nF} = \frac{F}{\pi(R-t)^2}, \tau_n = \frac{2T}{\pi(R-t)^3}, \frac{\tau_n}{\sigma_{nF}} = 2,5 = \text{konst.} \quad (6.2.1)$$

V tabulce 5 jsou uvedeny konkrétní hodnoty krouticího momentu a síly, které byly aplikovány na daném vzorku. Je zachován konstantní poměr napětí ze vztahu (6.2.1).

i	$T_i$ [kNm]	$F_i$ [N]
1	84,823	1130973
2	101,787	1357168
3	118,752	1583362

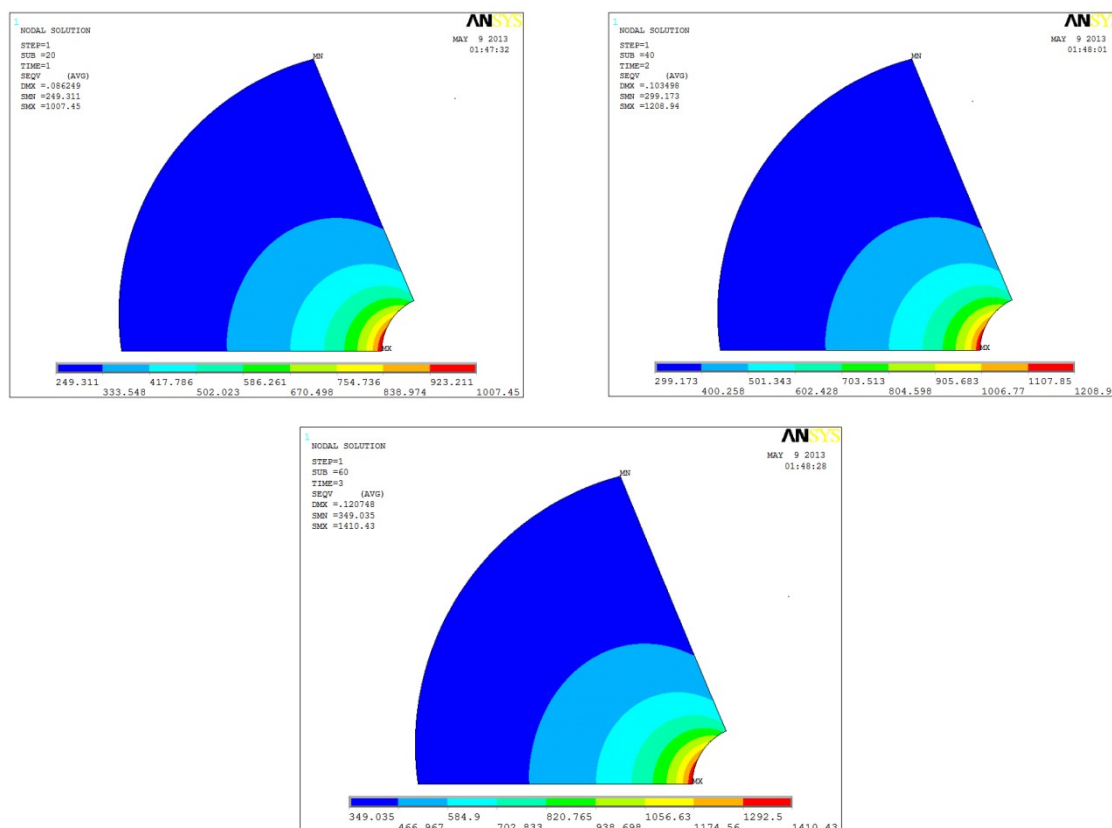
Tabulka 5 Velikost krouticího momentu a síly

Výsledný průběh napětí je znázorněn na Obr. 36.



Obr. 36 Průběh napětí na vzorku 2a zatíženém současným tahem a krutem

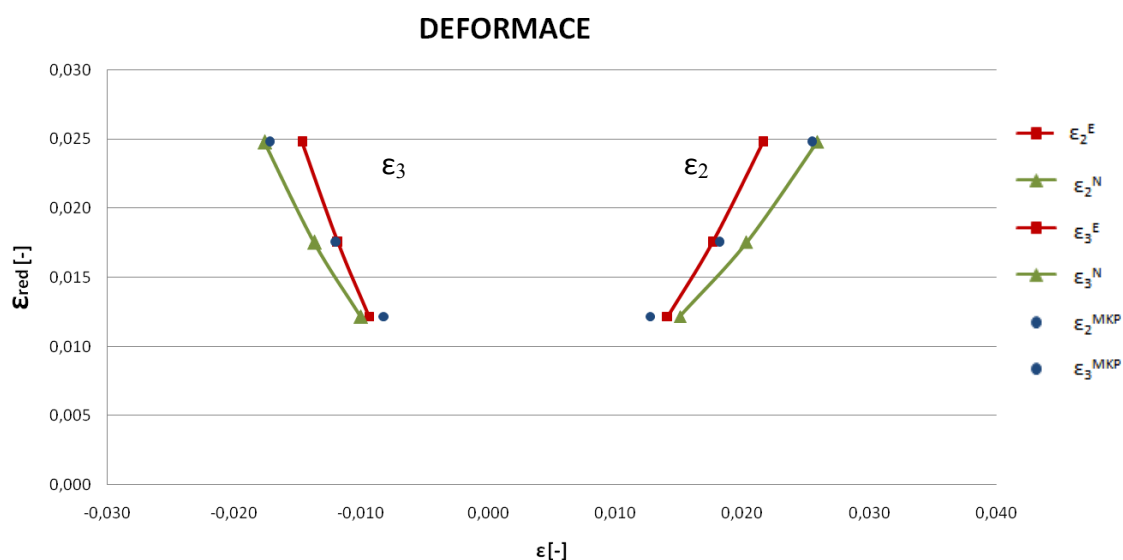
Na Obr. 37 jsou vykresleny průběhy redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet MKP ve všech třech zátěžných krocích.



Obr. 37 Průběh redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet MKP



Výsledný průběh deformace je uveden na Obr. 38.



Obr. 38 Průběh deformace na vzorku 2a zatíženém současným tahem a krutem

Při porovnání výsledných grafů z kapitoly 6.1.1 a 6.2.1 lze konstatovat, že jednotlivé průběhy napětí a deformace mají velmi podobné průběhy. Také pro nelineární materiál nelze předem určit, jestli hodnota napětí a deformace z elastoplastického MKP řešení bude mezi horním a dolním odhadem nebo bude větší než horní odhad či menší než dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu.

### 6.2.2 Kombinace tahu a vnitřního přetlaku pro Armstrong-Frederickův model

Armstrong-Fredericův model, zatížený tahem a současně vnitřním přetlakem, je aplikován na vzorek 2b (viz Obr. 8). Materiálové parametry  $C$  a  $\gamma$  (viz rovnice (6.1.3)) jsou voleny tak, aby nebyla překročena limitní plocha modelu. Napětí-ově-deformační křivka je vykreslena na Obr. 23. Pro nominální napětí platí:

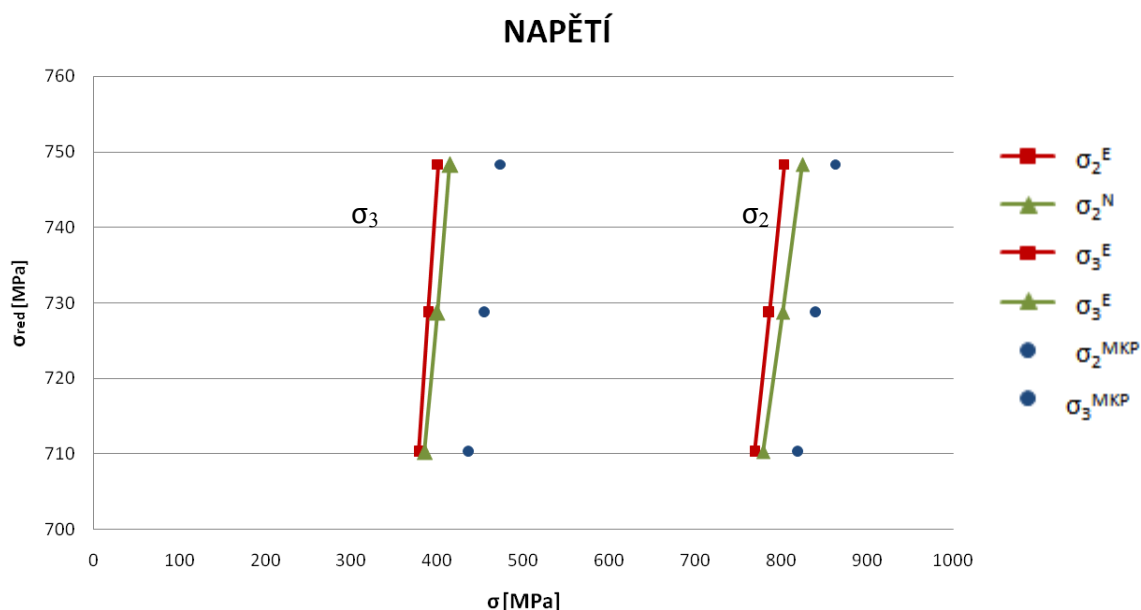
$$\sigma_{nF} = \frac{F}{\pi[(R_0 - t)^2 - R_i^2]}, \sigma_{np} = \frac{pR_i}{(R_0 - t - R_i)}, \frac{\sigma_{np}}{\sigma_{nF}} = 0,75 = \text{konst.} \quad (6.2.2)$$

V tabulce 6 jsou uvedeny konkrétní hodnoty vnitřního přetlaku a síly, které byly aplikovány na daném vzorku. Je zachován konstantní poměr napětí ze vztahu (6.2.2).

i	$p_i$ [MPa]	$F_i$ [N]
1	20,29	700000
2	21,74	750000
3	23,18	800000

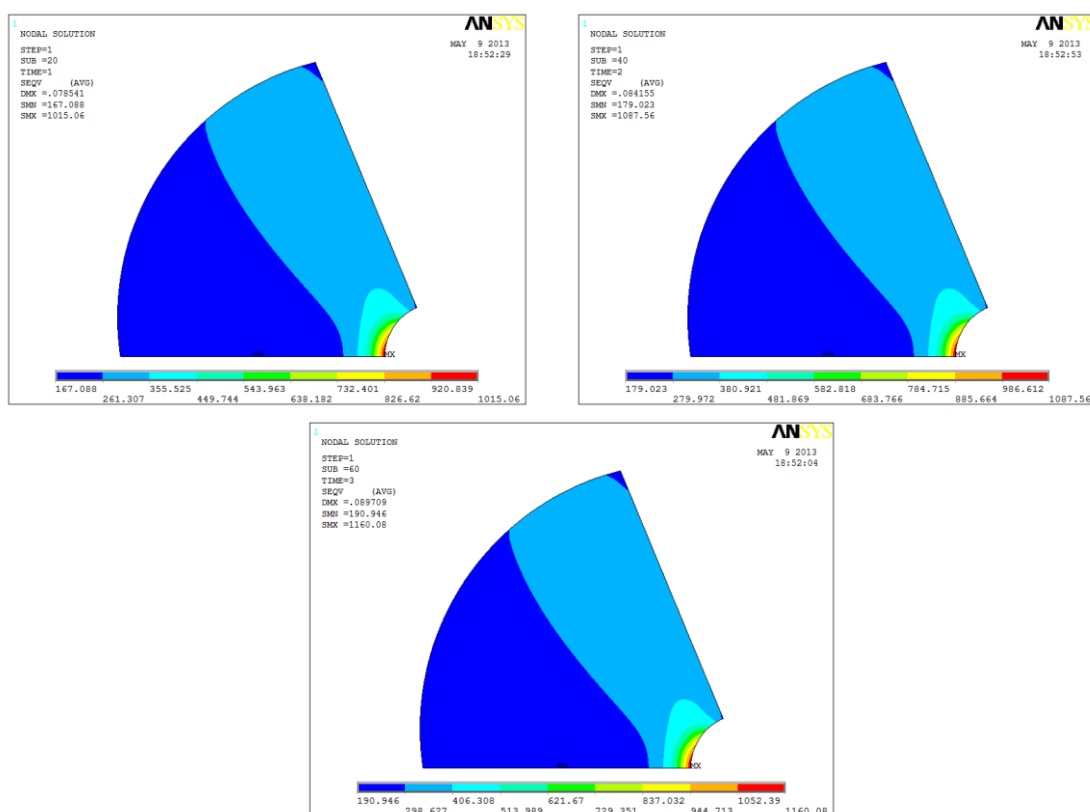
Tabulka 6 Velikost krouticího momentu a síly

Výsledný průběh napětí je znázorněn na Obr. 39:



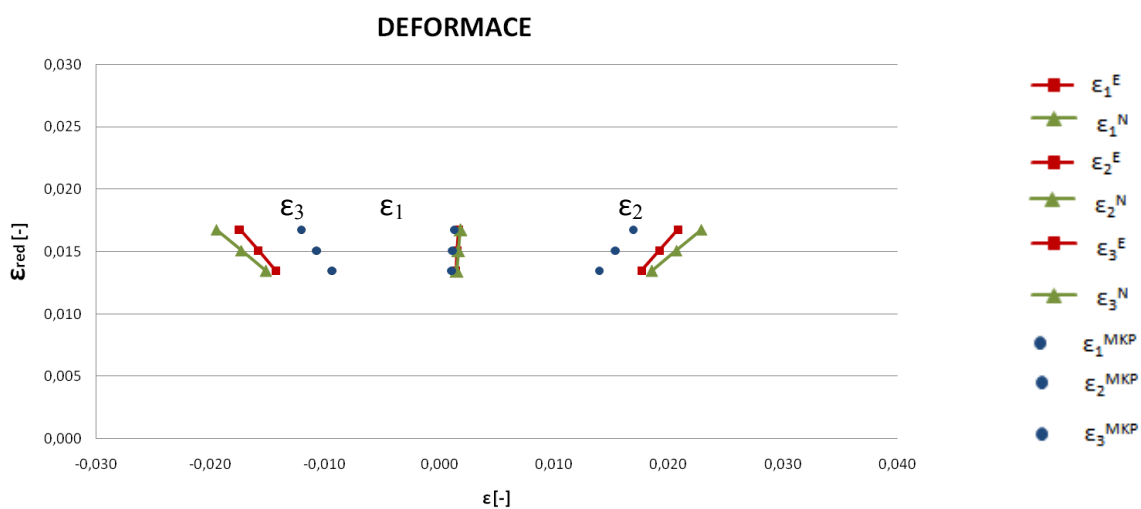
Obr. 39 Průběh napětí na vzorku 2b zatíženém současným tahem a vnitřním přetlakem

Na Obr. 40 jsou vykresleny průběhy redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet ve všech třech zátěžných krocích.



Obr. 40 Průběh redukovaného napětí podle HMM pro elastický výpočet

Výsledný průběh deformace je na Obr. 41:



Obr. 41 Průběh deformace na vzorku 2b zatíženém současným tahem a vnitřním přetlakem

Při porovnání výsledných grafů z kapitoly 6.1.2 a 6.2.2 lze konstatovat, že jednotlivé průběhy napětí a deformace mají velmi podobné průběhy. Také pro nelineární materiál nelze předem určit, jestli hodnota napětí a deformace z elastoplastického MKP řešení bude mezi horním a dolním odhadem nebo bude větší než horní odhad či menší než dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu. Odchytky elasto-plastického MKP řešení a výsledky po korekci se liší více, než v případě zatížení současným tahem a krutem. Tento rozdíl je způsoben tím, že první hlavní napětí v kořeni vrubu vychází kolem 100 MPa u tahu a vnitřního přetlaku a u druhého typu zatížení je tato hodnota o 70% menší. Při korekci se uvažovalo, že v kořeni vrubu je nulové první hlavní napětí, což v daném případě neplatí (viz kapitola 2).

## 6.3 Výpočet za použití obou materiálových modelů současně

### 6.3.1 Zatížení krutem

Krut je aplikován na vzorek číslo 3 (Obr. 9). Bilineární materiálové parametry jsou uvedeny ve vztazích (6.1.4) a Armstrong-Frederickovy v (6.1.5). Napět'ově-deformační křivky jsou pro oba materiálové modely vykresleny na Obr. 24. Pro nominální napětí platí:

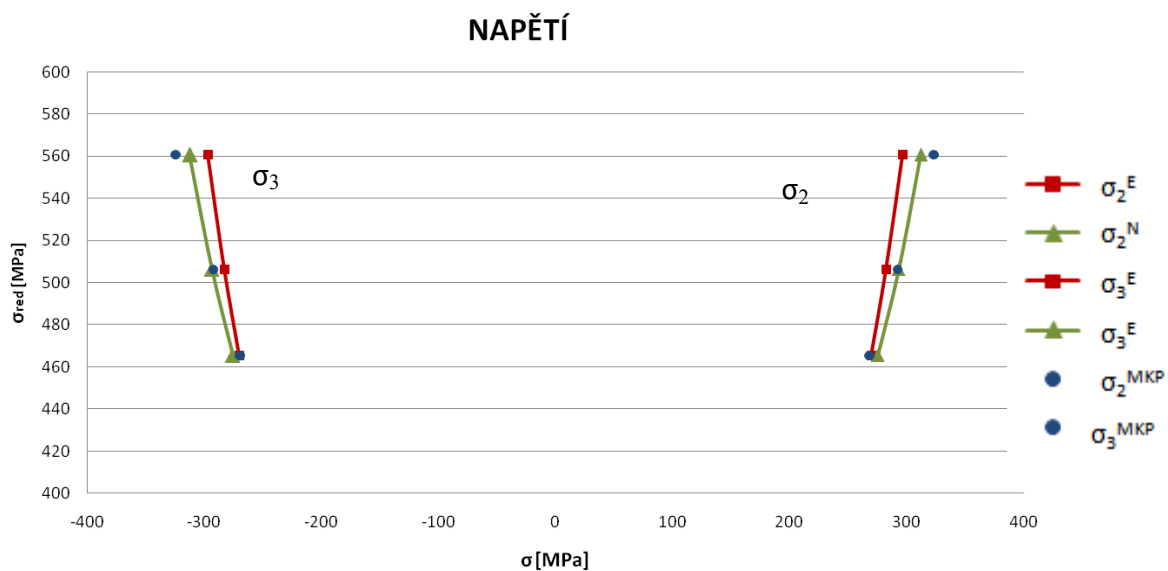
$$\tau_n = \frac{2T}{\pi(R - t)^3}. \quad (6.3.1)$$

Zatížení krutem, aplikované opět ve třech krocích, je uvedeno v tabulce 7:

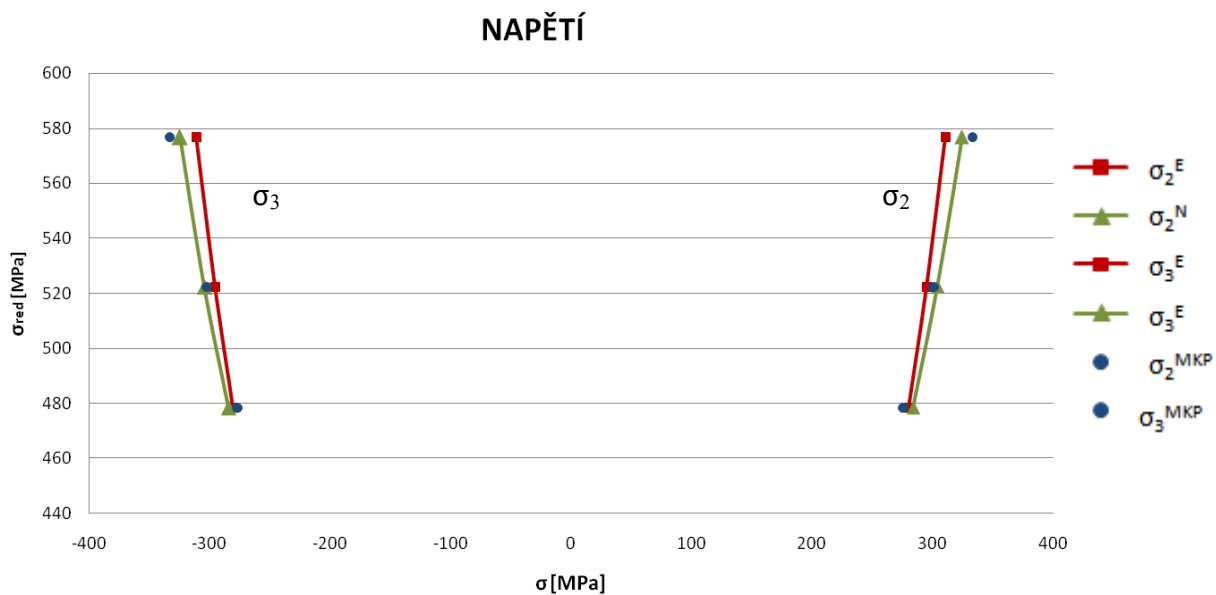
i	$T_i$ [kNm]
1	15
2	17,5
3	20

Tabulka 7 Velikost krouticího momentu

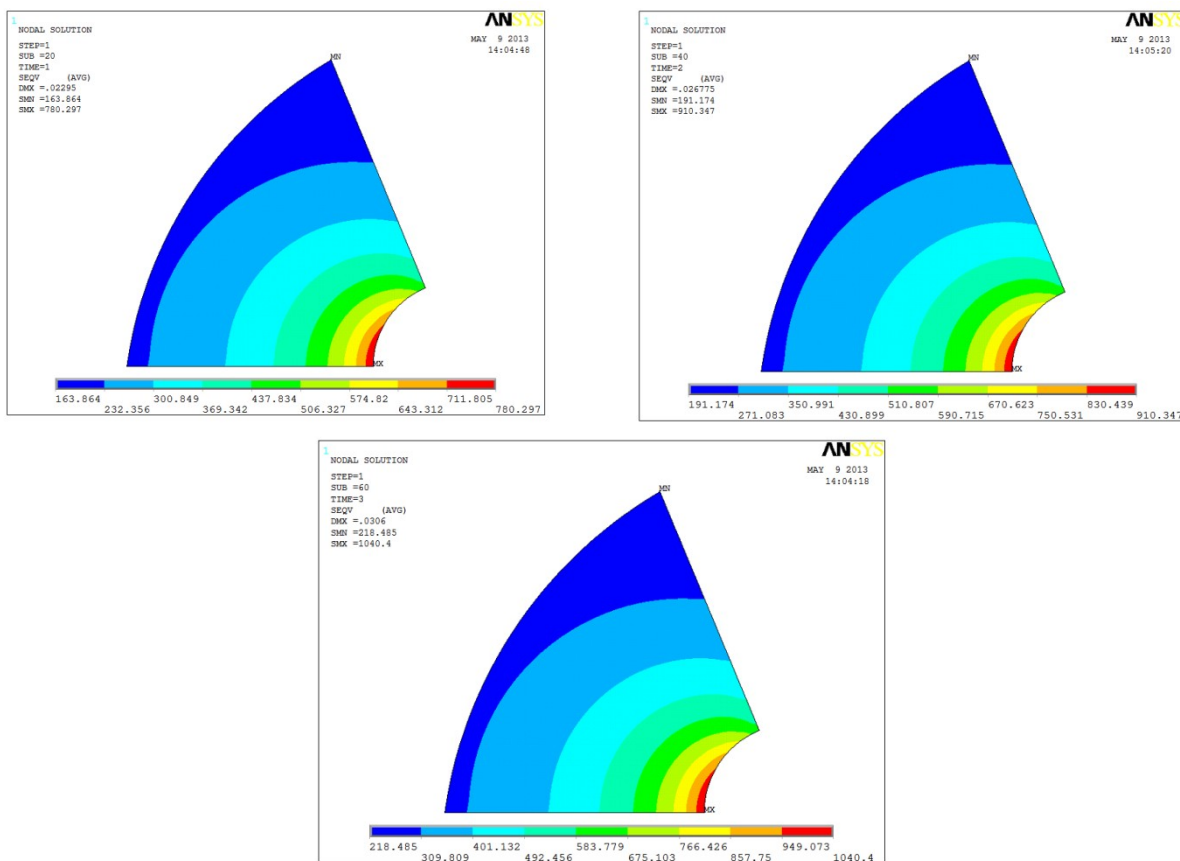
Na Obr. 42 až Obr. 46 jsou vykresleny průběhy napětí a deformací pro oba materiály.



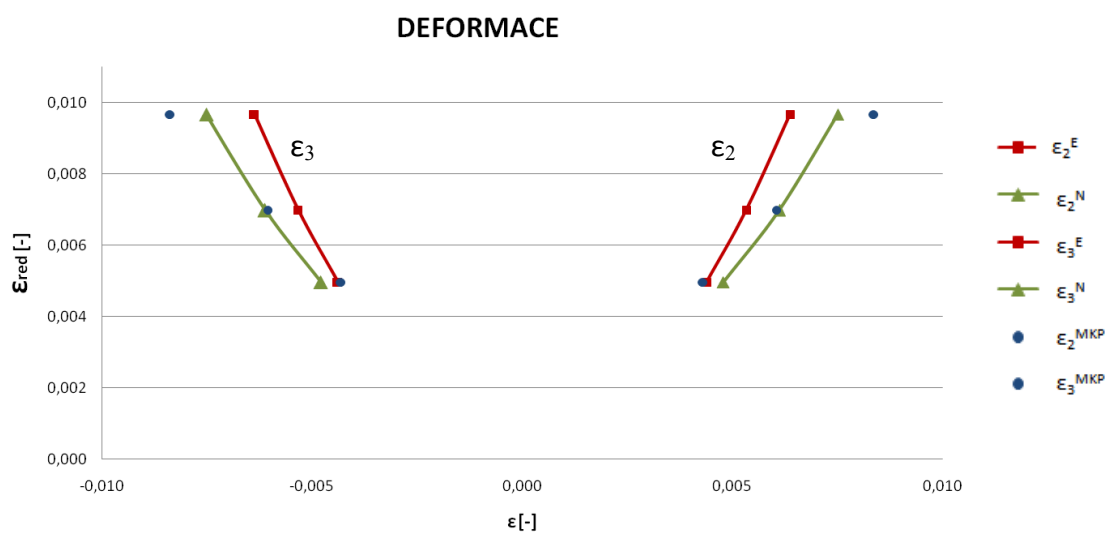
Obr. 42 Průběh napětí na vzorku 3 zatížený krutem – bilineární materiál



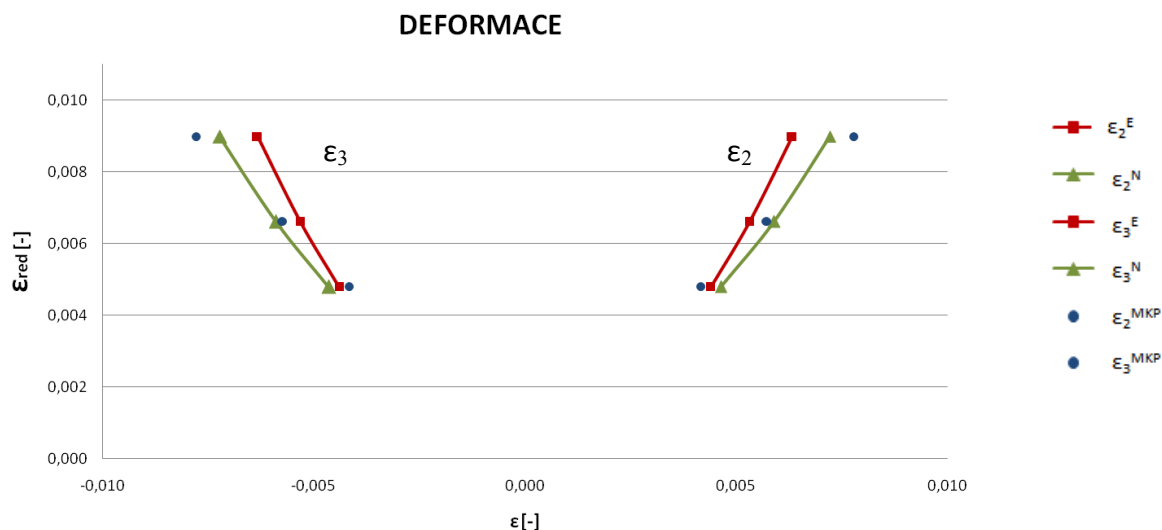
Obr. 43 Průběh napětí na vzorku 3 zatížený krutem – Armstrong-Frederickův model



Obr. 44 Průběh redukovaného napětí podle HMH pro elastický výpočet



Obr. 45 Průběh deformace na vzorku 3 zatížený krutem – bilineární materiál



Obr. 46 Průběh deformace na vzorku 3 zatížený krutem – Armstrong-Frederickův model

Rozdíly v průbězích nejsou na první pohled žádné, jen se liší číselné hodnoty. Tento malý rozdíl lze vysvětlit tím, že se nacházíme v oblasti, kde se deformační křivky bilineárního a nelineárního modelu liší jen nepatrně (Obr. 24). Napětí se liší v průměru o 10 MPa a deformace o  $10^{-4}$ .

### 6.3.2 Kombinace krutu a vnitřního přetlaku

Krut a vnitřní přetlak je aplikován na dutý válcový vzorek číslo 2b (viz Obr. 8). Bilineární materiálové parametry jsou uvedeny ve vztazích (6.1.4) a Armstrong-Frederickovy v (6.1.5). Napětí-ově-deformační křivky jsou pro oba materiálové modely vykresleny na Obr. 24. Pro nominální napětí platí:

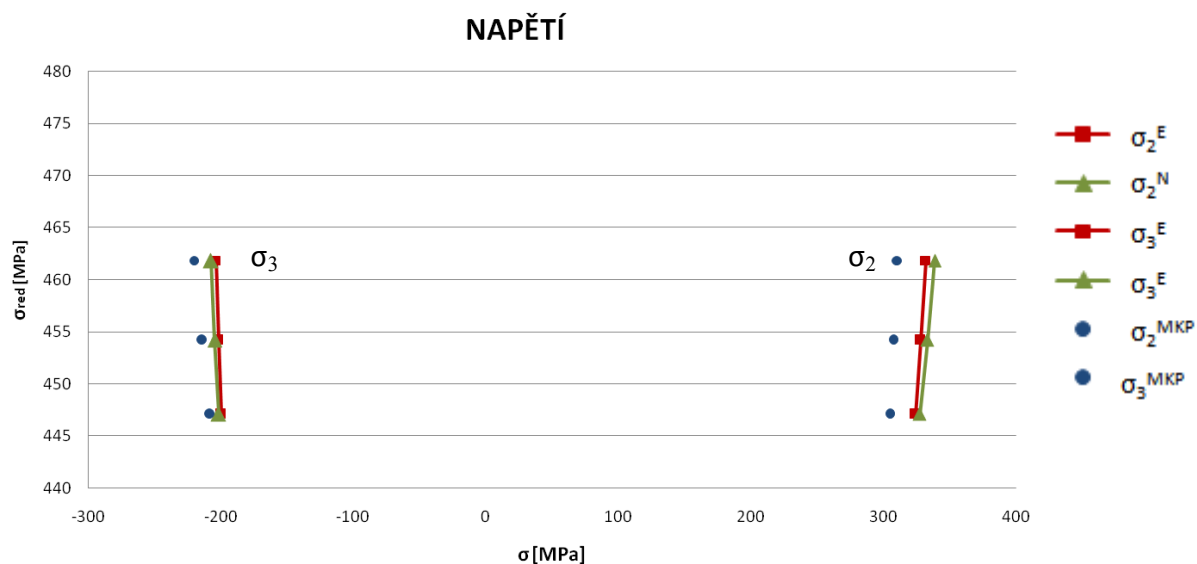
$$\tau_n = \frac{2T}{\pi[(R_0 - t)^3 - R_i^3]}, \sigma_{np} = \frac{pR_i}{(R_0 - t - R_i)}, \frac{\sigma_{np}}{\tau_n} = 1,03 = \text{konst.} \quad (6.3.2)$$

Zatížení je aplikované opět ve třech krocích, je uvedeno v tabulce 8. Je zachován konstantní poměr napětí ze vztahu (6.3.2).

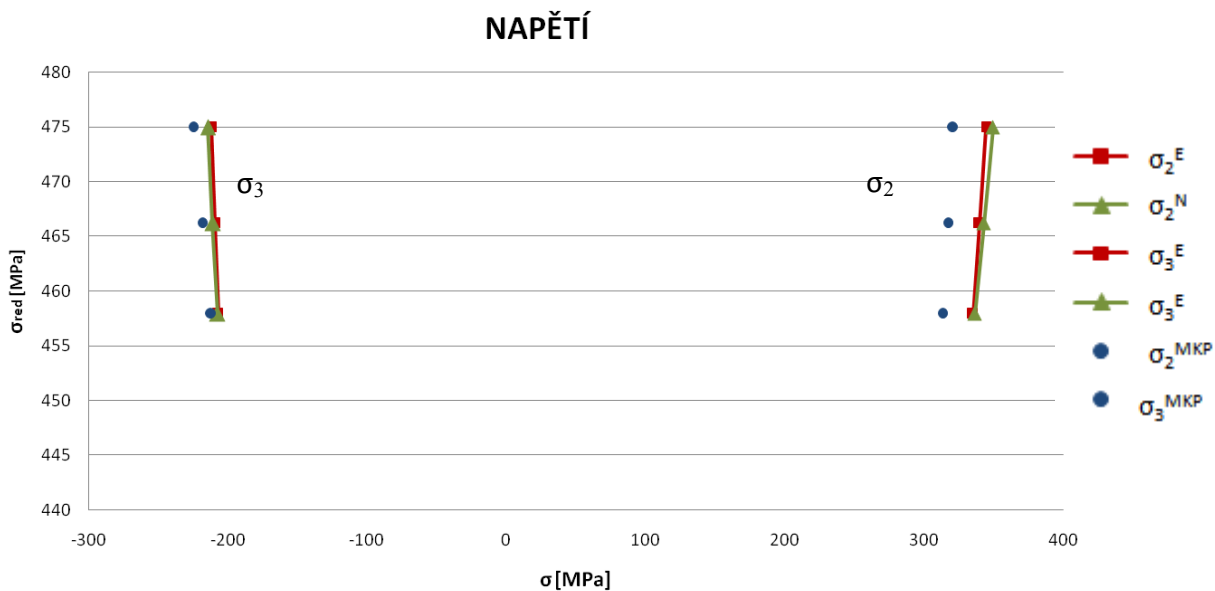
i	$p_i$ [MPa]	$T_i$ [kNm]
1	21	26,1
2	22	27,3
3	23	28,5

Tabulka 8 Velikost krouticího momentu a vnitřního přetlaku

Na Obr. 47 až Obr. 51 jsou vykresleny průběhy napětí a deformací pro oba materiály.

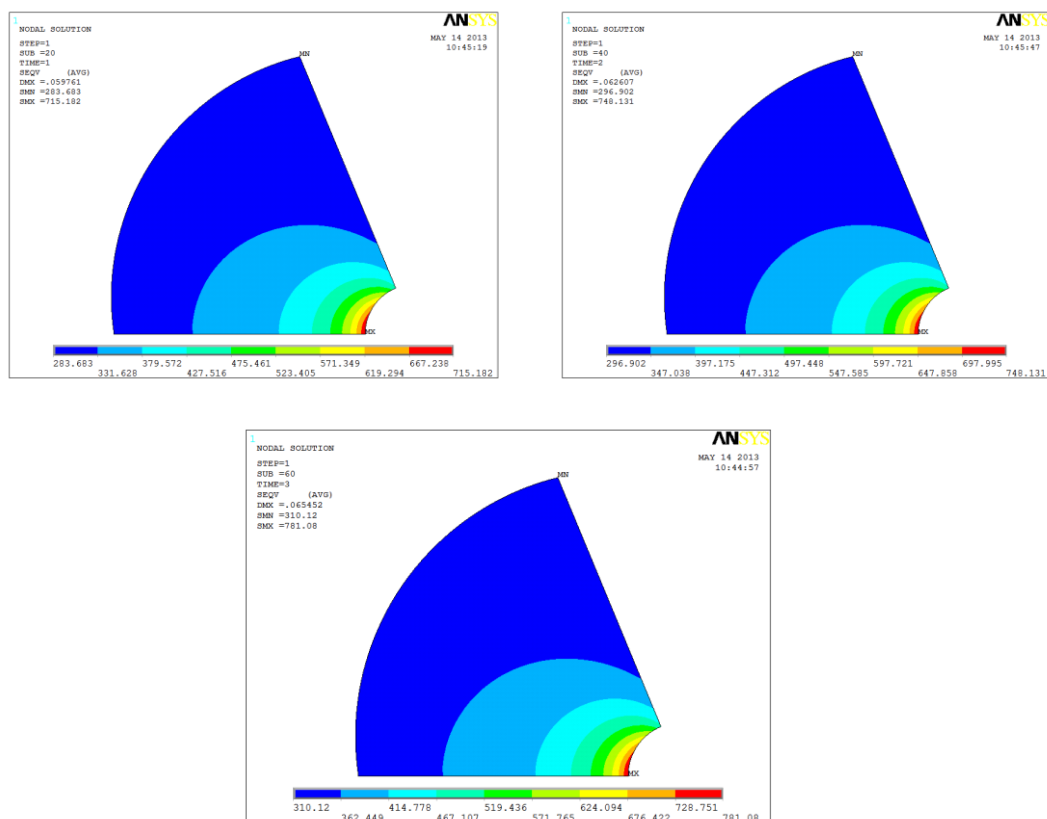


Obr. 47 Průběh napětí na vzorku 2b zatíženém krutem a vnitřním přetlakem – bilineární materiál

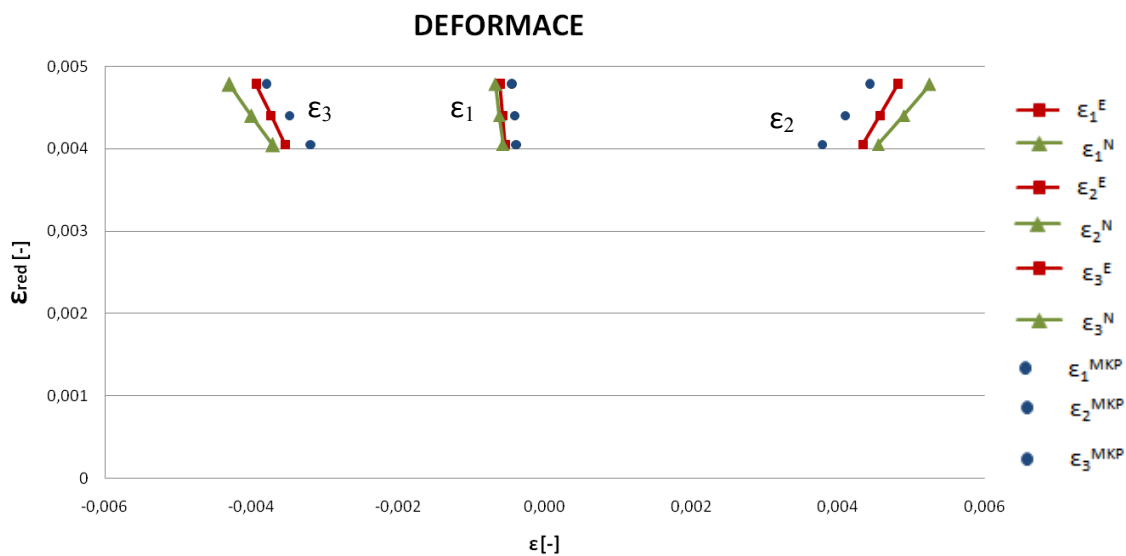


Obr. 48 Průběh napětí na vzorku 2b zatíženém krutem a vnitřním přetlakem – Armstrong-Frederickův model

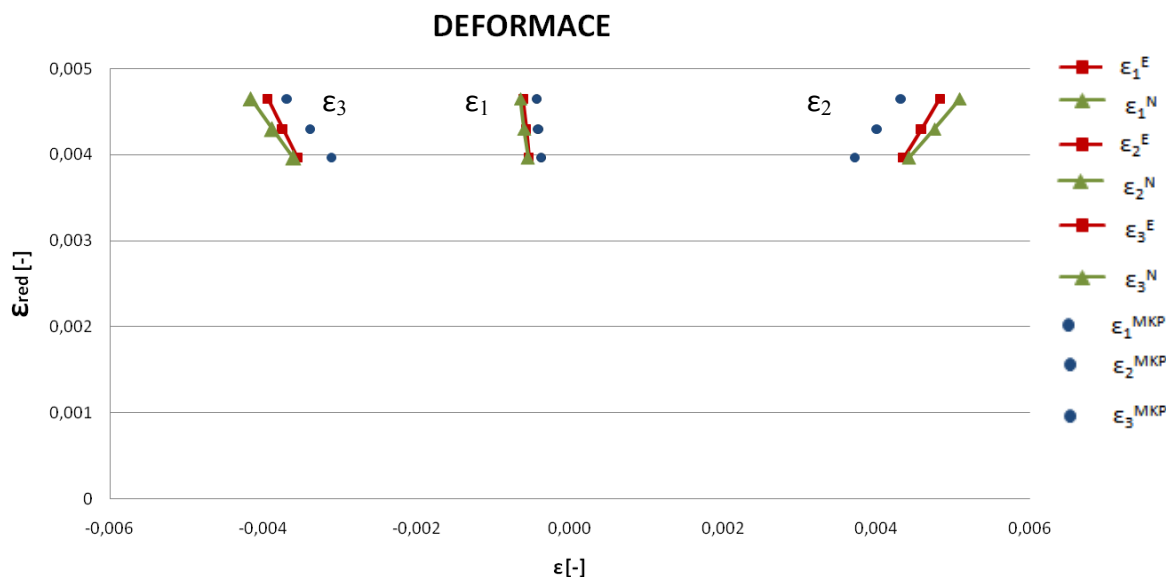




Obr. 49 Průběh redukovaného napětí podle HMH pro elastický výpočet



Obr. 50 Průběh deformace na vzorku 2b zatíženém krutem a vnitřním přetlakem – bilineární materiál



Obr. 51 Průběh deformace na vzorku 2b zatíženém krutem a vnitřním přetlakem – Armstrong-Frederickův materiál

Rozdíly v průbězích nejsou prakticky žádné, jen se liší číselné hodnoty. Tento rozdíl je patrný z Obr. 24 (napětíově deformační křivky nemají zcela stejný průběh).

## 6.4 Vyhodnocení výsledků

Verifikace bilineárního materiálu v kapitole 6.1 ukázala, že algoritmy vytvořené v programovacím jazyce ANSYS fungují správně. Nemůžeme ovšem porovnávat číselné výsledky získané z literatury s daty z programů v příloze, jelikož nebyla použita identická síť, což názorně naznačují Obr. 20 a Obr. 28. Nicméně výsledné průběhy napětí a deformace v kořeni vrubu jsou velmi podobné.

Druhá verifikace se týkala Armstrong-Frederickova modelu (viz kapitola 6.2) za použití stejného typu zatížení jako v kapitole 6.1. Výsledné průběhy napětí a deformace v kořeni vrubu pro Armstrong-Frederickův model jsou na první pohled totožné s průběhy pro materiál bilineární. Odlišnost tkví v číselných hodnotách napětí a deformace, z toho důvodu, že matematický popis obou materiálů v plastické oblasti není zcela totožný, ale mírně odlišný.

Poté byl zvolen zcela jiný materiál a geometrie vzorků, aby byla prokázána univerzálnost maker. Toto bylo provedeno v kapitole 6.3. Všeobecnost byla potvrzena.

Celkově lze konstatovat, že nelze předem určit, jestli hodnota napětí a deformace z elastoplastického MKP řešení bude mezi horním a dolním odhadem nebo bude větší než horní odhad či menší než dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu. Ovšem výsledky ukazují, že horní odhad napětí a deformace je vždy v absolutní hodnotě vyšší, než-li dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu.

## 7. ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývá řešením elastoplastické napjatosti v kořeni vrubu válcového vzorku (viz Obr. 6 až Obr. 9), který byl uvažován jak dutý, tak plný. Vruby patří mezi jeden z hlavních zdrojů iniciátorů lomů těles. Konstrukční vruby jsou v praxi nezbytné z hlediska funkce zařízení, a proto je důležité koncentraci napětí způsobenou touto náhlou změnu tvaru podrobněji zkoumat.

V práci byl kladen důraz na Neuberovu [1] a Glinkovu [2] metodu, které vycházejí z ekvivalentních energií. Jejich podrobný popis se nachází v kapitole 2. Na základě analýzy obou metod byly vytvořeny algoritmy pro stanovení elasto-plastické odezvy v kořeni vrubu v programu ANSYS APDL. Algoritmy automaticky zpracují MKP modely (viz kapitola 4) a následně stanoví horní (Neuber) a dolní (Glinka) odhad napětí a deformace v kořeni vrubu (viz kapitola 5). Algoritmy byly vytvořeny nejprve pro bilineární materiál a následně upraveny i pro nelineární materiál. Konstituční rovnice nelineárního materiálu byla zvolena v souladu s Armstrong-Frederickovým modelem zpevnění tak, aby bylo možno provést srovnání s výpočtem MKP.

Pro tvorbu MKP modelu bylo vytvořeno makro v programovacím jazyce programu Ansys (APDL) s názvem Model. Algoritmy pro plastickou korekci v kořeni vrubu byly nejprve odladěny v programu Matlab, viz příloha. Následně byly algoritmy přeprogramovány do makra Vypocty v jazyce APDL, které jsou přiloženy na CD-ROM. Uživatel se může seznámit s návodem k ovládání programů Model a Vypocty v podkapitolách 4.1 a 5.4. Pro efektivní práci s výstupními soubory vznikl i excelovský soubor ZPRACOVANI\_VYSLEDNYCH\_DAT, do kterého je možné výsledná data zkopírovat a vykreslit tak požadované průběhy napětí a deformace.

V kapitole 6 je uvedena řada příkladů pro stanovení elasto-plastického řešení z MKP výpočtu. Je uvažováno jak s dutými, tak plnými válcovými vzorky, které jsou podrobeny různým kombinacím zatížení – tah+krut, tah+vnitřní přetlak, krut, krut+vnitřní přetlak. Ve zkoumaném rozsahu napětí a deformace bylo dosaženo poměrně dobré shody s MKP (do 20%).

Lze konstatovat, že horní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu koresponduje s Neuberovou metodou a naopak dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu je v souladu s Glinkovou metodou. Nedá se ovšem předem určit, jestli elasto-plastické MKP řešení bude ležet mezi horním a dolním odhadem nebo bude větší než horní odhad či menší než dolní odhad napětí a deformace v kořeni vrubu. Celkově oba odhady velmi dobře nahrazují elasto-plastický výpočet, a to platí pro bilineární i Armstrong-Frederickův model.

Význam práce je především v oblasti únavy materiálu. Únavové zkoušky jsou poměrně časově i finančně náročné, proto se v praxi čím dál více uplatňují výpočtové metody pro predikci životnosti. V nízkocyklové oblasti je pak zapotřebí získat kompletní historii tenzoru napjatosti a tenzoru deformace, což je velmi náročné na výpočetní čas. Naopak výpočet pomocí makra Vypočty trvá v řádu sekund či minut a výpočty lze provádět opakovaně.

Do budoucna se tento výkum může rozrůst i o neproporcionální namáhání, pro které jsou již sestaveny potřebné soustavy rovnic (viz kapitola 2.4).

## **8. PODĚKOVÁNÍ**

Děkuji doc. Ing. Radimu Halamovi, Ph.D. za odborné vedení, poskytování cenných rad a věnovanému času při konzultacích. Jeho zkušenosti a rady byly cenným podkladem pro vypracování mé diplomové práce. Dále všem ostatním, kteří se i sebemenší radou podíleli na mé diplomové práci.

## 9. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] NEUBER., H.: *Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law*, Journal of applied Mechanics, 1961, ASME 26, 544-550 s.
- [2] GLINKA, G.: *A Method of Elastic-Plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root*, Material Science and Engineering, 1981, Vol 50, 93-100 s.
- [3] KNOP, M.; JONES, L.: *On the Glinka and Neuber methods for calculating notch tip strains under cyclic load spektra*, International Journal of Fatigue, 2000, Vol 22, 743-755 s.
- [4] YE, D.; MATSUOKA, S.: *Further investigation of Neuber's rule and the equivalent strain energy density (ESED) method*, International Journal of Fatigue, 2004, Vol 26, 447-455 s.
- [5] NEUBER, H.: *Kerbspannungslehre – Theorie der Spannungskonzentration Genaue Berechnung der Festigkeit*, 1958, 326 s. ISBN 978-3-540-67657-7
- [6] KUČERA, J.: *Úvod do mechaniky lomu I.*, 1. vydání, Ostrava: VŠB-TUO, 2002, 156 s., ISBN 80 -7078 – 862 -3
- [7] TOPPRE, T. H.; WETZEL, R. M.: *Neubers rule applied to fatigue of notches specimens*, Illinois univ., 1969, 21 s.
- [8] MOFTAKHAR, A: *Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notches under multiaxial loading*, Internatiol Journal of Fracture, 1995, Vol 70, 357-373
- [9] SINGH, M.N.K., GLINKA, G., DUBNEY, R.N: *Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading*, International Journal of Fracture, 1996, Vol. 76, 39–60 s.
- [10] HALAMA, R.; PARMA, S.: *Cyklická plasticita. [Zpráva FAD/11/003]*, VŠB-TUO a ČVUT v Praze, Ostrava, 2011, 142 s.
- [11] HOFFMAN, M.; SEEGER, T.: *Kerbbeanspruchungen I, Vorhaben No. 71, Forschungshefte, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V.*, 1985, 115 s.
- [12] HOFFMAN, M.; SEEGER, T.: *The Use of Hencky's Equations for the Estimation of Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains*, Technische Hochschule Darmstadt, No. FB-3/1986
- [13] ANSYS, Inc. *ANSYS Release 14.0 Documentation*. 2012. Dostupné v elektronické podobě jako součást softwaru ANSYS 14.0

# 10. SEZNAM PŘÍLOH

## 10.1 Tištěná příloha

%VOLBA MATERIALOVYCH PARAMETRU

%AF MODEL

sig0=550;E=94400;C=10000;ny=0.3;gamma=10;

%BILINEARNI MODEL

sig0=550;E=94400;Et=2303.36;ny=0.3;

%VYSLEDNE ELASTICKE MKP RESENI

eps1e=[-2.444424563E-03 -3.056544121E-03 -3.73757778E-03];

eps2e=[ 6.929494137E-03 8.664740525E-03 1.059534571E-02];

eps3e=[1.494462479E-03 1.868697678E-03 2.285065304E-03];

sig2e=[828.842397 1036.39662 1267.31787];

sig3e=[434.175483 542.899355 663.86366];

%VYPOCET

v=numel(eps1e);M=zeros(v,5);

M(:,1)=eps1e;M(:,2)=eps2e;M(:,3)=eps3e;M(:,4)=sig2e;M(:,5)=sig3e;

%GLINKA\_AF

syms eps1E eps2E sig2E sig3E

pomocna=zeros(v,1);pomocna2=zeros(v,1);GLINKA\_AF=zeros(v,5);

for i=1:v

pomocna(i,1)=(1-(gamma/C)\*((sqrt(M(i,4)^2-M(i,4)\*M(i,5)+M(i,5)^2))-sig0))/gamma;

end

for i=1:v

if pomocna(i,1)>0

A=(M(i,4)\*M(i,2))/(M(i,4)\*M(i,2)+M(i,3)\*M(i,5));

F=[0.5\*(M(i,4)\*M(i,2)+M(i,3)\*M(i,5))-((1+ny)\*(sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2)))/(3\*E)-((1-2\*ny)\*(sig2E+sig3E))/(6\*E)+((sig0+C/gamma)\*((log(1-(gamma/C)\*((sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2))-sig0)))/gamma))+((sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2)-sig0)/gamma);eps1E+(ny/E)\*(sig2E+sig3E)-((log(1-(gamma/C)\*(sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2))-sig0))\*((sig2E+sig3E)))/(2\*gamma\*sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2));eps2E-(1/E)\*(sig2E-ny\*sig3E)+((log(1-(gamma/C)\*(sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2))-sig0))\*((sig2E-0.5\*sig3E)))/(gamma\*sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2));((sig2E\*eps2E)\*(1-A))/(A\*sig3E)-(1/E)\*(sig3E-ny\*sig2E)+((log(1-(gamma/C)\*(sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2))-sig0))\*((sig3E-0.5\*sig2E)))/(gamma\*sqrt(sig2E^2-sig2E\*sig3E+sig3E^2))];

X0=[M(i,1);M(i,2);M(i,4);M(i,5)];

presnost=1;

J=jacobian(F,[eps1E,eps2E,sig2E,sig3E]);

F0=subs(F,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);

J0=subs(J,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);

X=X0-inv(J0)\*F0;

pres=norm(X-X0);

while norm(X-X0)>presnost

X0=X;

pomocna2(i,1)=(1-(gamma/C)\*((sqrt(X0(3)^2-X0(4)\*X0(3)+X0(4)^2))-sig0))/gamma;

if pomocna2(i,1)>0

J=jacobian(F,[eps1E,eps2E,sig2E,sig3E]);

F0=subs(F,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);

J0=subs(J,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);



```

        X=X0-inv(J0)*F0;
        pres=norm(X-X0);

    else
        podminka=-0.1;
    end
end

if pomocna2(i,1)>0
    GLINKA_AF(i,3)=X(1,1);
    GLINKA_AF(i,4)=X(2,1);
    GLINKA_AF(i,5)=(X(3,1)*X(2,1)*(1-
(M(i,4)*M(i,2))/(M(i,4)*M(i,2)+M(i,3)*M(i,5)))/((M(i,4)*M(i,2))/(M(i,4)
*M(i,2)+M(i,3)*M(i,5)))*X(4,1));
    GLINKA_AF(i,1)=X(3,1);
    GLINKA_AF(i,2)=X(4,1);
else
    GLINKA_AF(i,:)=0;
end
else
    GLINKA_AF(i,:)=0;
end

end

%NEUBER_AF
syms eps1N sig2N sig3N
epseqp=(log(1-(gamma/C)*(sqrt(sig2N^2-sig2N*sig3N+sig3N^2)-sig0)))/gamma;
pomocna=zeros(v,1);
pomocna2=zeros(v,1);
for i=1:v
    pomocna(i,1)=(1-(gamma/C)*((sqrt(M(i,4)^2-M(i,4)*M(i,5)+M(i,5)^2))-
sig0))/gamma;
end

for i=1:v
    if pomocna(i,1)>0
        F=[eps1N+(ny/E)*(sig2N+sig3N)-
epseqp*(sig2N+sig3N)/(2*sqrt(sig2N^2-
sig2N*sig3N+sig3N^2));(M(i,4)*M(i,2))/sig2N-(1/E)*(sig2N-
ny*sig3N)+epseqp*(sig2N-0.5*sig3N)/(sqrt(sig2N^2-
sig2N*sig3N+sig3N^2));(M(i,3)*M(i,5))/sig3N-(1/E)*(sig3N-
ny*sig2N)+epseqp*(sig3N-0.5*sig2N)/(sqrt(sig2N^2-sig2N*sig3N+sig3N^2))];
        X0=[M(i,1);M(i,4);M(i,5)];
        presnost=1;
        J=jacobian(F,[eps1N,sig2N,sig3N]);
        F0=subs(F,{eps1N sig2N sig3N},X0);
        J0=subs(J,{eps1N sig2N sig3N},X0);
        X=X0-inv(J0)*F0;
        while norm(X-X0)>presnost
            X0=X;
            pomocna2(i,1)=(1-(gamma/C)*((sqrt(X0(2)^2-
X0(2)*X0(3)+X0(3)^2))-sig0))/gamma;

            if pomocna2(i,1)>0
                F0=subs(F,{eps1N sig2N sig3N},X0);
                J0=subs(J,{eps1N sig2N sig3N},X0);
                X=X0-inv(J0)*F0;
                pres=norm(X-X0);

            else
                podminka=-0.1;
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end

    if pomocna2(i,1)>0
        NEUBER_AF(i,3)=X(1,1);
        NEUBER_AF(i,4)=(M(i,4)*M(i,2))/X(2,1);
        NEUBER_AF(i,5)=(M(i,3)*M(i,5))/X(3,1);
        NEUBER_AF(i,1)=X(2,1);
        NEUBER_AF(i,2)=X(3,1);
    else
        NEUBER_AF(i,:)=0;
    end
else
    NEUBER_AF(i,:)=0;
end

end

%GLINKA_BILIN
Hp=E*Et/(E-Et);
GLINKA_BILIN=zeros(v,5);
for i=1:v

    A=(M(i,4)*M(i,2))/(M(i,4)*M(i,2)+M(i,3)*M(i,5));
    F=[0.5*(M(i,4)*M(i,2)+M(i,5)*M(i,3))-((1+ny)*(sqrt(sig2E^2-
sig2E*sig3E+sig3E^2)))/(3*E)-((1-2*ny)*(sig2E+sig3E))/(6*E)-((sig2E^2-
sig2E*sig3E+sig3E^2)-
sig0^2)/(2*Hp);eps1E+(ny/E)*(sig2E+sig3E)+((sqrt(sig2E^2-
sig2E*sig3E+sig3E^2)-sig0)/(2*Hp))*((sig2E+sig3E)/(sqrt(sig2E^2-
sig2E*sig3E+sig3E^2)));eps2E-(1/E)*(sig2E-ny*sig3E)-(((sqrt(sig2E^2-
sig2E*sig3E+sig3E^2))-sig0)/Hp)*((sig2E-0.5*sig3E)/(sqrt(sig2E^2-
sig2E*sig3E+sig3E^2)));((sig2E*eps2E)*(1-A))/(A*sig3E)-(1/E)*(sig3E-
ny*sig2E)-(((sqrt(sig2E^2-sig2E*sig3E+sig3E^2))-sig0)/Hp)*((sig3E-
0.5*sig2E)/(sqrt(sig2E^2-sig2E*sig3E+sig3E^2)))]];
    X0=[M(i,1);M(i,2);M(i,4);M(i,5)];
    presnost=1;
    J=jacobian(F,[eps1E,eps2E,sig2E,sig3E]);
    F0=subs(F,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);
    J0=subs(J,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);
    X=X0-inv(J0)*F0;
    pres=norm(X-X0);
    while norm(X-X0)>presnost
        X0=X;
        J=jacobian(F,[eps1E,eps2E,sig2E,sig3E]);
        F0=subs(F,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);
        J0=subs(J,{eps1E eps2E sig2E sig3E},X0);
        X=X0-inv(J0)*F0;
        pres=norm(X-X0);
    end
    GLINKA_BILIN(i,1)=X(3);
    GLINKA_BILIN(i,2)=X(4);
    GLINKA_BILIN(i,3)=X(1);
    GLINKA_BILIN(i,4)=X(2);
    GLINKA_BILIN(i,5)=(X(3)*X(2))*(1-A)/(A*X(4));
end

%NEUBER_BILIN
NEUBER_BILIN=zeros(v,5);

for i=1:v
    F=[eps1N+(ny/E)*(sig2N+sig3N)+((sqrt(sig2N^2-
sig2N*sig3N+sig3N^2)-sig0)/(2*Hp))*((sig2N+sig3N)/(sqrt(sig2N^2-

```

```

sig2N*sig3N+sig3N^2)); (M(i,4)*M(i,2))/sig2N-(1/E)*(sig2N-ny*sig3N)-
((sqrt(sig2N^2-sig2N*sig3N+sig3N^2))-sig0)/Hp)*((sig2N-
0.5*sig3N)/(sqrt(sig2N^2-sig2N*sig3N+sig3N^2))); (M(i,5)*M(i,3))/sig3N-
(1/E)*(sig3N-ny*sig2N)-((sqrt(sig2N^2-sig2N*sig3N+sig3N^2))-
sig0)/Hp)*((sig3N-0.5*sig2N)/(sqrt(sig2N^2-sig2N*sig3N+sig3N^2)));
X0=[M(i,1);M(i,4);M(i,5)];
presnost=1;
J=jacobian(F,[eps1N sig2N sig3N]);
F0=subs(F,{eps1N sig2N sig3N},X0);
J0=subs(J,{eps1N sig2N sig3N},X0);
X=X0-inv(J0)*F0;
pres=norm(X-X0);
while norm(X-X0)>presnost
    X0=X;
    J=jacobian(F,[eps1N sig2N sig3N]);
    F0=subs(F,{eps1N sig2N sig3N},X0);
    J0=subs(J,{eps1N sig2N sig3N},X0);
    X=X0-inv(J0)*F0;
    pres=norm(X-X0);
end
NEUBER_BILIN(i,1)=X(2);
NEUBER_BILIN(i,2)=X(3);
NEUBER_BILIN(i,3)=X(1);
NEUBER_BILIN(i,4)=(M(i,4)*M(i,2))/X(2);
NEUBER_BILIN(i,5)=(M(i,5)*M(i,3))/X(3);
end

```

```

NEUBER_AF
GLINKA_AF
NEUBER_BILIN
GLINKA_BILIN

```

## 10.2 Příloha na CD-ROM

- **Jacobiovy\_matic** – analytické vyjádření Jacobiových matic pro výpočet dolního a horního napětí v kořeni vrubu
- **Model** – makro v ANSYSu APDL pro automatickou generaci MKP modelů
- **Model14** – makro v ANSYSu APDL pro automatickou generaci MKP modelů (kompatibilní pro starší i novější verze)
- **Vypocty** – výpočetní makro v ANSYSu APDL pro automatický výpočet korekcí u elastických modelů či napětí a deformace u elasto-plastických modelů
- **Vypocty14** – výpočetní makro v ANSYSu APDL pro automatický výpočet korekcí u elastických modelů či napětí a deformace u elasto-plastických modelů (kompatibilní pro starší i novější verze)
- **ZPRACOVANI\_VYSLEDNYCH\_DAT** – excelovský soubor pro grafické zpracování výsledků